线性激励合同：次优解

- 信息经济学
- 湖南大学课程

道德风险情形

接下来求解道德风险情形 (即公司不能直接监督张三的行动) 时的公司最优合同.

- 公司的工资合同 $w(q)$ 只能取决于产出 q, 不能取决于努力水平 a
- 此时的均衡结果是次优的 (second-best).

给定任意工资合同 $w(q)$, 我们可以通过求解张三的最优化问题, 来确定其选择的努力水平 a.

在求解代理人张三的最优化问题前, 我们先简单了解对数正态分布以及其期望的性质.

预备知识: 对数正态分布

称随机变量 Y 服从**对数正态分布**, 若它的自然对数 $Z = \ln Y$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

- 对数正态分布在统计建模中很常用. 如果你关注的随机变量取值恒为正 (如股票价格, 城市人口规模等), 对数正态分布是最常用的分布假设.
- 根据中心极限定理: 如果一个变量是许多独立正随机变量的乘积, 那么其分布近似为对数正态.

预备知识: 对数正态分布

称随机变量 Y 服从**对数正态分布**, 若它的自然对数 $Z = \ln Y$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

- 对数正态分布在统计建模中很常用. 如果你关注的随机变量取值恒为正 (如股票价格, 城市人口规模等), 对数正态分布是最常用的分布假设.
- 根据中心极限定理: 如果一个变量是许多独立正随机变量的乘积, 那么其分布近似为对数正态.

对数正态分布的期望:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\exp(Z)] = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}), \quad Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- 注意: Y 的期望不仅和 μ 相关, 也和 σ^2 相关.

预备知识: 对数正态分布

之后的作业中, 我会要求同学们从公式推导 (或数值仿真) 的角度去理解 $\mathbb{E}[Y] = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$.

$\mathbb{E}[Y]$ 关于 σ^2 严格递增的直觉解释如下:

之后的作业中, 我会要求同学们从公式推导 (或数值仿真) 的角度去理解 $\mathbb{E}[Y] = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$.

$\mathbb{E}[Y]$ 关于 σ^2 严格递增的直觉解释如下:

- 较大的方差 (σ^2) 会导致更多的异常值 Z
- 指数变换 $Y = \exp(Z)$ 会放大那些极大异常值 Z 对期望的影响; 同时, 那些极小异常值 Z 对 Y 期望的影响几乎不变 (此时 $\exp(Z)$ 几乎为零)

张三的最优化问题:

$$\max_{a\geq 0} \mathbb{E}\left[-\exp\Big(-r\ (\ w(q)-C(a)\ )\Big)\right]$$

- 其中 $w(q)-C(a)=w_0+bq-C(a)=w_0+b(a+\varepsilon)-C(a)$.

张三的最优化问题:

$$\max_{a\geq 0}\mathbb{E}\left[-\exp\Big(-r\ (\ w(q)-C(a)\ )\Big)\right]$$

- 其中 $w(q)-C(a)=w_0+bq-C(a)=w_0+b(a+\varepsilon)-C(a)$.

简化目标函数:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[-e^{-r[w(q)-C(a)]}]&=\mathbb{E}[-e^{-r[w_0+b(a+\varepsilon)-C(a)]}]\\&=-e^{-r[w_0+ba-C(a)]}e^{\frac{1}{2}r^2b^2\sigma^2}\end{aligned}$$

张三最优化问题

张三的最优化问题简化为

$$\max_{a} w_0 + ba - C(a)$$

张三最优化问题

张三的最优化问题简化为

$$\max_{a} w_0 + ba - C(a)$$

一阶条件:

$$b = C'(a^*) \Longrightarrow a^* = b/c$$

- 张三的最优努力程度 a^* 正比于奖金率 b, 反比于努力成本的参数 c
- 最优努力程度 a^* 和基本工资 w_0 无关

IR 约束和 IC 约束

激励相容约束由张三的一阶条件概括:

$$a^* = b/c \quad \text{(IC)}$$

- 公司如果希望张三的努力程度为 a, 奖金率必须设定在 $b = ac$

张三的参与约束:

$$-e^{-r[w_0+ba-C(a)]}e^{\frac{1}{2}r^2b^2\sigma^2} \geq \underline{U} \quad \text{(IR)}$$

- 代入 $a = b/c$, 参与约束可化简为

$$w_0 + \frac{b^2}{2}(\frac{1}{c} - r\sigma^2) \geq \frac{-\ln(-\underline{U})}{r}$$

公司最优化问题

公司最优化问题的目标函数:

$$\mathbb{E}[q - w_0 - bq] = (1-b)a - w_0$$

公司最优化问题

公司最优化问题的目标函数:

$$\mathbb{E}[q - w_0 - bq] = (1-b)a - w_0$$

约束条件:

$$a = a^* = \frac{b}{c}$$

$$w_0 + \frac{b^2}{2}(\frac{1}{c} - r\sigma^2) \geq \frac{\underline{u}}{r}$$

- 第一个约束是激励相容约束 (IC), 第二个约束是个体理性 (IR), 其中 $\underline{u} = -\ln(-\underline{U})$.

公司最优化问题

均衡中, IR 约束是紧的.

- $w_0 = \frac{\underline{u}}{r} - \frac{b^2}{2}(\frac{1}{c} - r\sigma^2)$

代入到公司的目标函数, 得到无约束最优化问题:

$$\max_b \frac{(1-b)b}{c} + \frac{b^2}{2}(\frac{1}{c} - r\sigma^2) - \frac{\underline{u}}{r}$$

公司最优合同:

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

$$w_0^* = \frac{u}{r} - \frac{1 - rc\sigma^2}{2c^2(1 + rc\sigma^2)^2}$$

公司最优合同:

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

$$w_0^* = \frac{\underline{u}}{r} - \frac{1 - rc\sigma^2}{2c^2(1 + rc\sigma^2)^2}$$

公司最优合同下, 张三的努力水平为

$$a^* = \frac{1}{c(1 + rc\sigma^2)} < \frac{1}{c}$$

- a^* 总是低于无道德风险情形下的努力水平 $1/c$.

比较静态分析

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

比较静态分析

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

问: 公司何时不愿意对高产出给予高激励 (即奖金率 b^* 较低)?

比较静态分析

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

问: 公司何时不愿意对高产出给予高激励 (即奖金率 b^* 较低)?

- r 较大, 即张三更厌恶风险
- c 较大, 即努力的边际成本更高
- σ^2 较大, 即产出的不确定性更大

线性合同不是最优的

请思考: 线性合同在所有可行的工资合同 (即满足 IR 和 IC 约束) 中是(公司) 最优的吗?

考虑如下 “阶梯合同”: 公司只在产出高于某给定水平 q_0 时才发高工资 w_H, 某则发低工资 w_L.

$$w^*(q) = \begin{cases} w_H & \text{if} \quad q \geq q_0 \\ w_L & \text{if} \quad q < q_0 \end{cases}$$

线性合同不是最优的

请思考: 线性合同在所有可行的工资合同 (即满足 IR 和 IC 约束) 中是(公司) 最优的吗?

考虑如下 "阶梯合同": 公司只在产出高于某给定水平 q_0 时才发高工资 w_H, 某则发低工资 w_L.

$$w^*(q) = \begin{cases} w_H & \text{if} \quad q \geq q_0 \\ w_L & \text{if} \quad q < q_0 \end{cases}$$

- 这个阶梯合同最早由 Mirrlees 提出, 它在英文中常被称为 shoot-the-agent contract.
- shoot-the-agent contract 是一种诙谐的说法, 它表示该合同对张三低产出的惩罚非常严酷: 只要产出没到 q_0, 就只能拿低工资, 哪怕离 q_0 只差一点点.

最优阶梯合同

命题: 通过适当选择阶梯合同参数 w_H, w_L 和 q_0, 公司的期望利润可以无限逼近第一最优情形.

- 证明略去. 感兴趣的同学可以查看《合同理论》这本书 (Bolton and Dewatripont, 2005)

最优阶梯合同

命题: 通过适当选择阶梯合同参数 w_H, w_L 和 q_0, 公司的期望利润可以无限逼近第一最优情形.

- 证明略去. 感兴趣的同学可以查看《合同理论》这本书 (Bolton and Dewatripont, 2005)

这个命题的成立严重依赖于 ε 服从正态分布这个假设:

- 如果考虑更一般的产出分布 (即 q 在给定 a 时的条件分布不再是正态的), 阶梯合同下公司的利润就无法任意逼近第一最优情形, 并且此时公司最优合同的形式也严重依赖该条件分布的假设.
- 公司的最优合同**非常不稳健**

Why linear contracts?

- 虽然线性合同对公司而言几乎永远不是最优的, 但它在现实中广泛存在. 对于这个事实, 研究人员有两种可能反应:
  - **观点一:** 委托人不够聪明, 没能设计出最大化其期望利润的合同
  - **观点二:** 线性合同一定有某些**很好的性质**, 并且这些性质是我们现有模型未能捕捉到的

Why linear contracts?

- 虽然线性合同对公司而言几乎永远不是最优的, 但它在现实中广泛存在. 对于这个事实, 研究人员有两种可能反应:
  - **观点一:** 委托人不够聪明, 没能设计出最大化其期望利润的合同
  - **观点二:** 线性合同一定有某些**很好的性质**, 并且这些性质是我们现有模型未能捕捉到的

Holmström & Milgrom (1987) 认为, 线性合同的优势在于其**稳健性**:

> It is probably the **great robustness** of linear rules based on aggregates that accounts for their popularity. That point is not made as effectively as we would like by our model; we suspect that it cannot be made effectively in any traditional Bayesian model. But issues of robustness lie at the heart of explaining any incentive scheme which is expected to work well in practical environments.

线性合同的优势

尽管线性合同一般都不是公司最优的, 但相比于复杂的非线性合同, 线性合同有如下优势:

1. **(动态情形)** 现实中委托人和代理人的互动往往是动态的, 并且代理人的产出是逐渐累积的. 比如, 先形成 1 单位产出, 然后是 3 单位, 最后总产出达到 q 单位.
   - 在动态情形中, 非线性合同可能是动态不一致的. 以前面的 "阶梯合同" 为例. 在产出达到阈值 q_0 后, 张三会立刻停止所有努力, 因为额外的付出也不会提高工资.
     - 这时, 公司很可能会反悔, 转而对张三的额外努力提供激励 (或对其怠工行为实施惩罚)

线性合同的优势

2. **(稳健性)** 非线性最优合同不稳健, 对模型的特定假设（例如 ε 的分布函数）很敏感.
    - 如何论证线性合同的稳健性, 至今仍是比较活跃的信息经济学研究前沿.

线性合同的优势

2. **(稳健性)** 非线性最优合同不稳健，对模型的特定假设（例如 ε 的分布函数）很敏感.
   - 如何论证线性合同的稳健性，至今仍是比较活跃的信息经济学研究前沿.
3. **(简洁性)**: 线性合同很简单，便于理解和描述.
   - 如何从理论上严格说明**简单合同**所能带来的实际好处，是今天非常活跃的机制设计研究前沿.