求解最优化问题 $\mathcal{M}$

1. 委托人的含约束最优化问题 $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
&\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1(\pi_1 - w_1) + (1-p_1)(\pi_0 - w_0) \\
&\text{subject to} \;\; p_1 u(w_1) + (1-p_1)u(w_0) - l \geq \underline{u} \qquad \text{(IR)} \\
&\qquad\qquad\quad (p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \qquad \text{(IC)}
\end{aligned}$$

- 开始求解前, 不妨先代入具体参数, 用计算机软件画图得出约束 (IR) 和 (IC) 的具体区域 (见课程网站给出的图例)
- 事实上, 如果给定了模型参数 (效用函数 u, 概率 p_1, 公司收益 π_1, 等等), 常见的数值计算软件都可以直接求解最优化问题 $\mathcal{M}$.
- 这样得到的解是**数值解**

2. 数值解 v.s. 解析解

不过, 在经济学研究中, 只有数值解通常是不够的.

- 我们需要找到含约束最优化问题 $\mathcal{M}$ 的**解析解**, 即内生变量 (合同工资) 关于外生变量的表达式
- 该二元模型的解析解: 满足 (IR) 和 (IC) 约束且最大化公司期望利润的激励合同 (w_0^*, w_1^*) 的表达式

我们以方程 $x^2 = a$ 为例说明数值解和解析解的不同.

- 解析解: $x = \sqrt{a}$
- 数值解:
  - 代入 $a = 2$, 数值解为 $x = 1.414$;
  - 代入 $a = 3$, 数值解为 $x = 1.732$;
  - …
  - 数值解不需要给出 (内生变量) x 的表达式, 并且通常都是非精确解

经济学模型通常只关注**解析解**:

- 一般来说, 只有得到了解析解, 才能进行比较静态分析, 并进一步刻画均衡的福利性质

但数值解也很有用:

- 借助计算机, 数值解通常容易求得. 因此, 实际研究中, 我一般会先代入具体的参数算一些具体的数值例子. 根据这些数值解, 去猜可能的解析解.
- 对于很多经济学模型, 解析解有时很难得到, 这时我们称这个问题是**难以求解的** (intractable).
  对于难以求解的模型, 如果能找到高效的数值解算法, 也是很大的贡献.

3. 求解委托人最优化问题

我们试着找出最优化问题 $\mathcal{M}$ 的**解析解**. 注意到:

1. 公司总是希望支付尽可能低的工资 w_1, w_0
2. 约束 (IR) 在 w_1, w_0 均较高时才成立
3. 约束 (IC) 在 w_1 (显著)高于 w_0 时才成立

4. 不等式约束

约束 (IC) 和 (IR) 都是不等式约束.

- 若不等式约束 (IC) 在某个合同 (w_0, w_1) 处取到等号, 则称约束 (IC) 在 (w_0, w_1) 处是**紧的** (binding);
- 否则, 称约束 (IC) 是**非紧的**或**松的** (non-binding, slack).

记 (w_0^*, w_1^*) 为最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解

- 解的存在性由极值定理保证.

我们接下来证明, 在 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 和 (IR) 都是紧的.

5. (IR) 约束是紧的

引理一: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解(w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IR) 一定是紧的.

- **(反证)** 反设约束 (IR) 在 (w_0^*, w_1^*) 处是非紧的.
- (**微扰**) 我们可以将 w_0^* 和 w_1^* 分别降低 ε_0 和 ε_1.
- 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $(w_0^* - \varepsilon_0, w_1^* - \varepsilon_1)$ 也满足 (IR) 和 (IC) 约束. (**为什么?**)
- 公司提供合同 $(w_0^* - \varepsilon_0, w_1^* - \varepsilon_1)$ 可以获得更高的利润. 矛盾.

6. (IC) 约束是紧的

引理二: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 一定是紧的.

证明方式仍然是微扰法, 具体思路如下:

- 反设 (w_0^*, w_1^*) 处 (IC) 是松的. 根据引理一, (w_0^*, w_1^*) 处 (IR) 约束是紧的.
  - 我们不能同时下调 w_0^* 和 w_1^*, 否则会违反 (IR).
- (**微扰**) 将 w_1 下调 $\frac{1-p_1}{u'(w_1)}\varepsilon$, 将 w_0 上调 $\frac{p_1}{u'(w_0)}\varepsilon$
- **证明 (留作习题):** 只要 $\varepsilon > 0$ 足够小, 通过上述微扰得到的新工资合同仍然满足 (IC) 和 (IR) 约束, 并且严格提高了公司的期望利润.

7. 最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解

(IR) 和 (IC) 约束均取等号时:

$$p_1 u(w_1) + (1-p_1)u(w_0) = \underline{u} + l$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] = l$$

$\Longrightarrow$ 两个等式和两个未知数 ($u(w_0)$ 和 $u(w_1)$):

- 紧的 (IR) 条件决定了张三的效用水平 $\underline{u} + l$
- 紧的 (IC) 条件决定了 w_1 和 w_0 的差值

联立求解, 得到 w_1^* 和 w_0^*, 再代入最优化问题的目标函数可以求得公司的期望利润.

令 $l = 1$, 联立紧的 (IR) 和 (IC) 条件可得:

$$u(w_0^*) = \underline{u} - \frac{p_0}{p_1 - p_0} \qquad u(w_1^*) = \underline{u} + \frac{1-p_0}{p_1 - p_0}$$

公司对应的期望利润:

$$p_1(\pi_1 - w_1^*) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0^*)$$

8. 公司最优合同

最优化问题 $\mathcal{M}$ 求解的是公司最优**激励合同**

- 激励合同下, 张三会接受公司的雇佣 (由 IR 约束保证) 并且努力干活 (由 IC 约束保证)
- **问:** 最优激励合同一定是公司的最优合同么?

答: 不一定.

- 最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 是公司最优的**激励合同** (雇佣张三并且张三会努力干活)
- 还存在两种其它可能的 "角点解"
  1. 不使用激励合同, 只支付基本工资. (此时没有 IC 约束, 张三在均衡中一定会偷懒)
  2. 公司不雇佣张三 (此时没有 IC 和 IR 约束)

情形一: 公司使用最优激励合同: w_1^* 和 w_0^*

情形二: 公司仅支付基本工资, 不使用激励合同.

- 基本工资 w 的值由张三的参与约束决定: $u(w) = \underline{u}$
- 以下因素均可能导致公司放弃使用激励合同:
  1. 张三非常厌恶风险
     - 随着张三的风险厌恶程度上升, 公司必须支付更高的**额外激励** $(\Delta w = w_1 - w_0)$ 才能满足激励相容约束.
  2. 努力干活带给张三的负效用太大
  3. 努力干活带给公司的边际收益 $((p_1 - p_0)(\pi_1 - \pi_0))$ 不高

情形三: 不雇佣张三

- 如果张三的保留效用 $\underline{u}$ 过高, 或者张三负责的项目带给公司的收益很低, 公司雇佣张三的边际成本可以大于雇佣张三带来的边际收益.
  - 此时, 公司的最优选择是不雇佣张三.
  - 最优工资合同为 $w = 0$.

公司的最优合同肯定是以上三种情形之一.

具体是哪种情形, 由模型的参数决定:

- 张三的效用函数 $u(w)$
- 张三的保留效用: $\underline{u}$
- 努力工作带给张三的负效用: l
- 张三工作带给公司的期望利润:
  - 成功概率: p_1, p_0
  - 项目收益: π_1, π_0