

筛选：求解卖家最优化问题

- 信息经济学
- 湖南大学课程

卖家最优化问题

$$\max_{q_L, p_L, q_H, p_H} \alpha_L(p_L - c(q_L)) + \alpha_H(p_H - c(q_H))$$

约束条件:

$$\theta_L q_L - p_L \geq \theta_L q_H - p_H, \quad (\text{IC}_L)$$

$$\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_L - p_L, \quad (\text{IC}_H)$$

$$\theta_L q_L - p_L \geq 0, \quad (\text{IR}_L)$$

$$\theta_H q_H - p_H \geq 0 \quad (\text{IR}_H)$$

正式求解前, 先画图定性分析.

两类消费者的无差异曲线

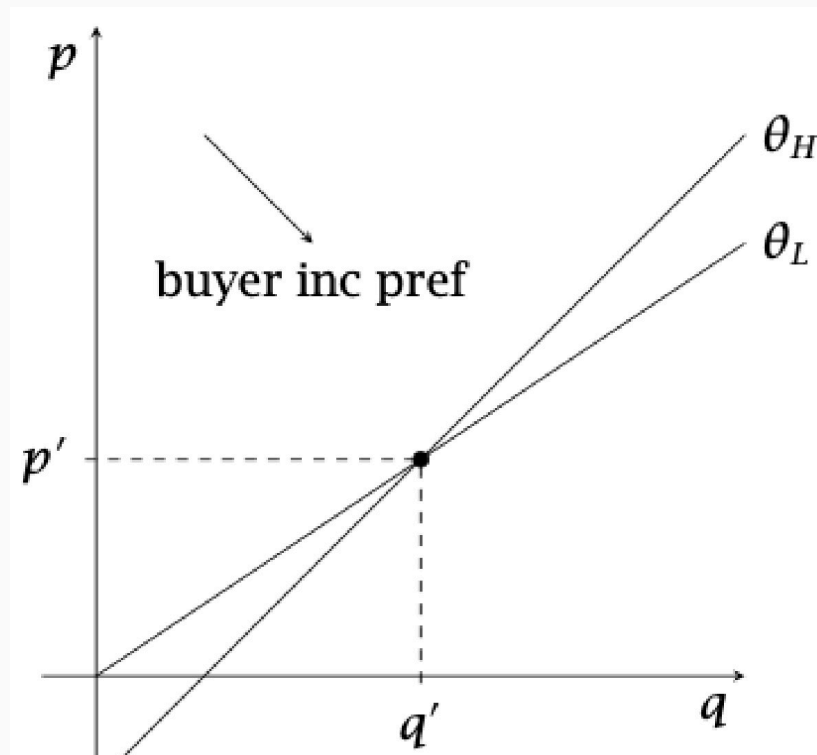


Figure 1: 类型 θ_H 消费者的边际支付意愿更高, 对应的无差异曲线斜率更大

两类消费者的无差异曲线

如果忽略激励相容条件, 在仅考虑参与约束的第一最优解中, 两类产品质量 q_H^{FB} 和 q_L^{FB} 由消费者无差异曲线和卖家等利润线的切点决定:

$$C'(q_H^{FB}) = \theta_H, \quad C'(q_L^{FB}) = \theta_L$$

- 请自行在上图的基础上画出卖家等利润线和第一最优解

两类消费者的无差异曲线

如果忽略激励相容条件, 在仅考虑参与约束的第一最优解中, 两类产品质量 q_H^{FB} 和 q_L^{FB} 由消费者无差异曲线和卖家等利润线的切点决定:

$$C'(q_H^{FB}) = \theta_H, \quad C'(q_L^{FB}) = \theta_L$$

- 请自行在上图的基础上画出卖家等利润线和第一最优解

容易验证:

1. $q_H^{FB} > q_L^{FB}$ (这一点由成本函数 $C(q)$ 严格凸保证)
2. 第一最优解**违背了高类型**消费者的激励相容条件: $\theta_H q_H^{FB} - p_H^{FB} > \theta_H q_L^{FB} - p_L^{FB}$.
3. 第一最优解**没有违背低类型**消费者的激励相容条件.

定性分析 (or 画图分析)

从第一最优解出发, 为了防止高类型模仿低类型, 卖家可以从下面两个方面对销售方案进行调整:

1. 降低高类型产品价格 p_H , 即对高类型消费者让利.
2. 在维持紧 IR_L 约束的前提下, 降低低类型产品质量 q_L 和价格 p_L .
 - 由于高类型消费者的支付意愿更高, 上述调整会让 (q_L, p_L) 对高类型消费者的吸引力降低.

定性分析 (or 画图分析)

基于定性分析, 我们可作出如下推测: 一个性质良好的均衡 (即内点解) 将具有以下性质:

1. 约束 IR_L 是紧的: 低类型消费者的无差异曲线通过原点 (消费者对于“买”和“不买”无差异)
2. 约束 IR_H 是松的: 高类型消费者的均衡净效用严格为正.

不同于第一最优解, 激励相容约束迫使卖家对高类型消费者让利, 因此均衡中高类型消费者获得正剩余.

- 通常将该正剩余称为高类型消费者获得的**信息租** (information rent)

断言.

1. IR_L 和 IC_H 蕴含着 IR_H ; 换言之, 约束 IR_H 是冗余的.
2. IC_L 和 IC_H 蕴含着 $q_H \geq q_L$
3. 若均衡中 $q_H \neq q_L$, 两个激励相容约束 (IC_L 和 IC_H) 有且只有一个是紧的.

上述三个断言的证明过程相对直接, 主要涉及不等式的操作, 此处证明从略.

由于 $q_H \geq q_L$, 存在两种可能的均衡类型.

1. $q_H \geq q_L > 0$, 卖家同时服务两类消费者.
 - 均衡中, IR_L 是紧的, IR_H 是松的.
 - $q_H > q_L$: **分离均衡**
 - $q_L = q_H$: **混同均衡**. 此时卖家放弃价格歧视

由于 $q_H \geq q_L$, 存在两种可能的均衡类型.

1. $q_H \geq q_L > 0$, 卖家同时服务两类消费者.
 - 均衡中, IR_L 是紧的, IR_H 是松的.
 - $q_H > q_L$: **分离均衡**
 - $q_L = q_H$: **混同均衡**. 此时卖家放弃价格歧视
2. 卖家放弃低类型 θ_L 消费者, 只服务高类型 θ_H 的消费者.
 - $q_L = p_L = 0$, 对应**角点解**的情形.
 - 均衡中, IR_H 是紧的.

拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L = & \alpha_L(p_L - c(q_L)) + \alpha_H(p_H - c(q_H)) + \\ & \lambda_L[\theta_L q_L - p_L - (\theta_L q_H - p_H)] + \lambda_H[\theta_H q_H - p_H - (\theta_H q_L - p_L)] + \\ & \mu_L[\theta_L q_L - p_L] + \mu_H[\theta_H q_H - p_H]. \end{aligned}$$

一阶条件:

$$-\alpha_L c'(q_L) + \lambda_L \theta_L - \lambda_H \theta_H + \mu_L \theta_L = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_L - \lambda_L + \lambda_H - \mu_L = 0 \quad (2)$$

$$-\alpha_H c'(q_H) - \lambda_L \theta_L + \lambda_H \theta_H + \mu_H \theta_H = 0 \quad (3)$$

$$\alpha_H + \lambda_L - \lambda_H - \mu_H = 0 \quad (4)$$

- 内点解中, IR_H 是松的: $\mu_H = 0$.
- 由一阶条件 (4): $\mu_H = 0$, 且 $\lambda_L \geq 0 \implies \lambda_H > 0$.
- 两个激励相容约束中只有一个是紧的 $\implies \lambda_L = 0$
- 一阶条件 (4): $\lambda_H = \alpha_H$.
- 一阶条件 (3) 意味着 q_H 满足 $c'(q_H) = \theta_H$

注意, $c'(q_H) = \theta_H$ 对应第一最优解的产品质量.

从 $\lambda_H = \alpha_H$ 和条件(2) 可得 $\mu_L = 1$.

最后, 由一阶条件 (1) 可得

$$c'(q_L) = \frac{\theta_L - \alpha_H \theta_H}{(1 - \alpha_H)}$$

从 $\lambda_H = \alpha_H$ 和条件(2) 可得 $\mu_L = 1$.

最后, 由一阶条件 (1) 可得

$$c'(q_L) = \frac{\theta_L - \alpha_H \theta_H}{(1 - \alpha_H)}$$

这个式子也给出了内点解的成立条件: $\theta_L > \alpha_H \theta_H$

- 如果 $\theta_L \leq \alpha_H \theta_H$, 均衡时一定有 $q_L = p_L = 0$. 即卖方的产品只覆盖类型 θ_H 消费者, 而不覆盖类型 θ_L 的消费者.

确定了均衡中的商品质量 q_L 和 q_H 后, 商品价格 p_L 和 p_H 由紧 IR_L 条件和紧 IC_H 条件决定.

- 两个等式联立可以直接求出 p_L 和 p_H , 不需要再使用一阶条件.

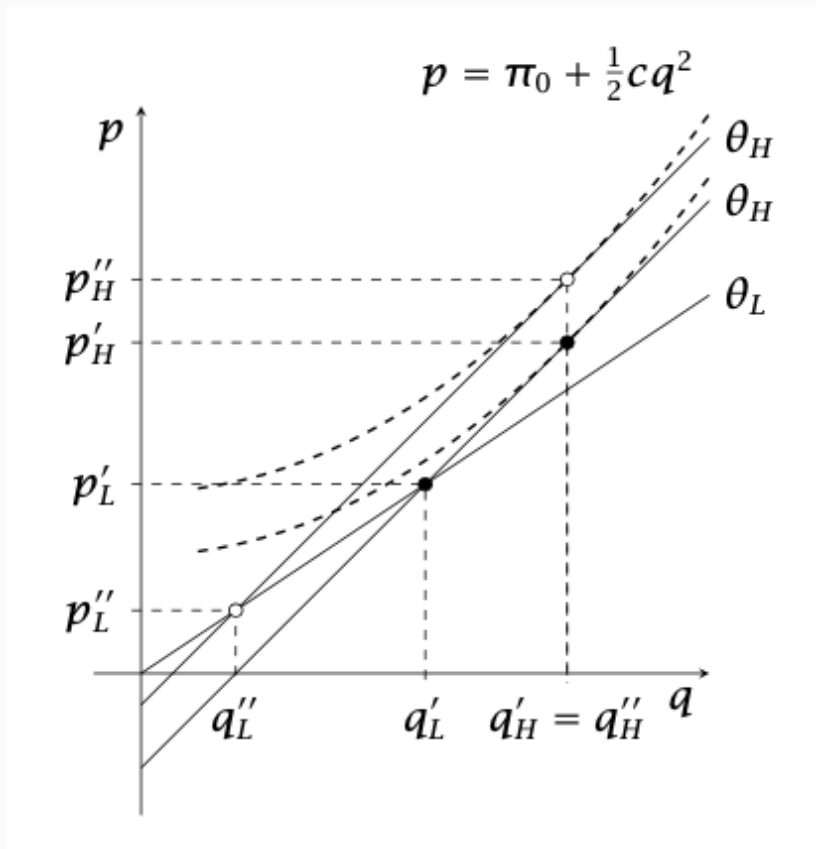
比较静态分析

问: 随着 α_H 变大 (即高类型消费者比例变多), 最优筛选合同会如何变化?

- 随着 α_H 的增加, q_L 会不断下降, 直到 $q_L = 0$ (即完全放弃低类型消费者市场)
- q_H 不变, p_H 变高
- q_L, p_L 均变低

假设成本函数为二次函数: $\frac{1}{2}cq^2$. 下图反映了(内点解中) α''_H 和 α'_H 下的最优合同, 其中 $\alpha''_H > \alpha'_H$

比较静态分析



高类型消费者比例从 α'_H 提高到 α''_H , 新均衡中 θ_H 的无差异曲线向上平移 (卖家下调信息租), 这进一步导致 p_L, q_L 上升.

比较静态分析

提高高类型消费者比例 α_H 对均衡的影响:

- 随着高类型消费者变多, 卖方倾向于提高 p_H , 降低均衡中高类型消费者的信息租
- 为了维持 IC_H 条件, 卖方必须使低价值合同对高类型消费者的价值降低: 降低 q_L 或降低 p_L
- 为了维持条件 IR_L 来留住低类型消费者, 卖方会同时降低 q_L 和 p_L , 新的均衡中 IR_L 仍是紧的.
- 当高类型消费者比例 α_H 足够高时, 均衡退化为角点解情形: 卖家只服务高类型消费者, 即 q_L 和 p_L 均为零.

小结

- 当低类型消费者占比足够小时, 卖家会放弃低类型消费者市场, 只服务高类型消费者市场.
 - 文字解释: 如果卖家同时服务两类消费者, 激励相容条件下必须给高类型消费者让利 (支付信息租). 如果低类型消费者市场很小, 卖家会放弃这些“蝇头小利”, 转而只服务高类型消费者, 这时不必给高类型消费者让利.
- 内点解中, 低类型消费者的剩余永远为零, 高类型消费者的剩余为正, 并且商品质量 q_H 是社会最优的.
 - Binding at the bottom; no distortion at the top (最低类型消费者的 IR 是紧的, 最高类型消费者的商品质量是社会最优的)
- 高类型消费者的激励相容约束是紧的.