

线性激励合同：模型设定和第一最优解

- 信息经济学
- 湖南大学课程

模型设定

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三
- **连续行动:** 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty)$

模型设定

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三
- **连续行动:** 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty)$
- **连续产出:** 张三的努力程度 a 决定了产出 (公司利润) $q \in \mathbb{R}$ 的分布.
 - 假设 $q = a + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
 - 努力程度越高, 结果为高产出的概率越高.

线性工资合同

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性 (工资) 合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - 线性合同仅由两个参数 w_0 和 b 决定: w_0 是固定工资, b 是奖金率.

线性工资合同

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性 (工资) 合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - 线性合同仅由两个参数 w_0 和 b 决定: w_0 是固定工资, b 是奖金率.
 - 理论上, 工资合同 $w(q)$ 也可以是非线性的. 不过线性合同的数学形式比较简单、便于分析, 并且它在现实中很常见.
- 问: 现实生活中有哪些**线性工资合同** (即“计件工资”) 的例子? 你的例子中应体现 (给定投入下) 产出的不确定性.

线性工资合同

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性 (工资) 合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - 线性合同仅由两个参数 w_0 和 b 决定: w_0 是固定工资, b 是奖金率.
 - 理论上, 工资合同 $w(q)$ 也可以是非线性的. 不过线性合同的数学形式比较简单、便于分析, 并且它在现实中很常见.
- 问: 现实生活中有哪些**线性工资合同** (即“计件工资”) 的例子? 你的例子中应体现 (给定投入下) 产出的不确定性.
 - 高校科研奖励 (比如一篇论文奖励 10 万)
 - 律师, 医生等专业服务 (比如一台普通手术报酬 5 千, 一起诉讼案报酬 2 万, 等等)

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同 $w(q)$:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 $\underline{U} < 0$, 公司获得利润 0.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同 $w(q)$:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 $\underline{U} < 0$, 公司获得利润 0.
3. 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty]$.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同 $w(q)$:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 $\underline{U} < 0$, 公司获得利润 0.
3. 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty]$.
4. 公司和张三均观测到产出 $q = a + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
公司按照合同 $w(q)$ 支付报酬给张三, 博弈结束.

公司是风险中性的, 其目标是最大化期望利润.

- 公司利润函数为 $q - w(q)$

效用函数

公司是风险中性的, 其目标是最大化期望利润.

- 公司利润函数为 $q - w(q)$

张三是风险厌恶的, 并且他的效用函数满足恒定绝对风险规避 (CARA):

$$- \exp\left(-r[w(q) - C(a)]\right) \equiv -e^{-r[w(q) - C(a)]}$$

其中:

- 张三的努力成本: $C(a) = ca^2/2$, 参数 $c > 0$ 是外生给定的; 参数 $r > 0$ 衡量了张三的绝对风险厌恶程度
- 努力成本 $C(a)$ 以(负)货币的形式进入张三的效用函数

用逆向归纳法求解公司的最优合同.

1. 在观察到线性合同 (w_0, b) 后, 张三选择行动 a^* 来最大化其期望效用.
2. 公司预期到张三的行动 a^* , 选择合同 (w_0, b) 来最大化其期望利润.

求解方法类似双寡头先后定产的斯塔克伯格模型.

基准情形: 无道德风险

先分析不存在道德风险的基准 (benchmark) 情形:

- 公司可以直接监督张三的行动
- 此时, 公司可以通过设计工资合同, 来直接规定公司所希望的努力程度 \hat{a} .
 - 如果张三的努力程度不等于 \hat{a} , 就不支付任何报酬
 - 此时, 只要该合同满足 IR 约束, 张三就一定会选择努力程度 \hat{a} .

基准情形: 无道德风险

先分析不存在道德风险的基准 (benchmark) 情形:

- 公司可以直接监督张三的行动
- 此时, 公司可以通过设计工资合同, 来直接规定公司所希望的努力程度 \hat{a} .
 - 如果张三的努力程度不等于 \hat{a} , 就不支付任何报酬
 - 此时, 只要该合同满足 IR 约束, 张三就一定会选择努力程度 \hat{a} .
- 公司的最优合同只包含两个参数:
 - (公司所希望的) 张三努力程度 a
 - 当张三的努力程度为 a 时, 公司支付的报酬 w
- 记此时的合同为 (a, w)

基准情形: 公司最优合同

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

基准情形: 公司最优合同

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

更高的工资会减少公司的利润, 因此均衡中 (IR) 约束是紧的:

$$\implies w^*(a) = C(a) - \frac{\ln(-\underline{U})}{r}$$

- 上述方程给出了公司的最优基本工资 $w^*(a)$ 作为张三行动 a 的函数.

基准情形: 公司最优合同

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

更高的工资会减少公司的利润, 因此均衡中 (IR) 约束是紧的:

$$\implies w^*(a) = C(a) - \frac{\ln(-\underline{U})}{r}$$

- 上述方程给出了公司的最优基本工资 $w^*(a)$ 作为张三行动 a 的函数.

基准情形: 公司最优合同

- 公司的最优化问题简化为选择某个最优行动 a
- 将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w] = a - C(a) + \frac{\ln(-U)}{r}$

基准情形: 公司最优合同

- 公司的最优化问题简化为选择某个最优行动 a
- 将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w] = a - C(a) + \frac{\ln(-U)}{r}$
- 公司的最优化问题: $\max_{a \geq 0} a - ca^2/2$
- 一阶条件: $1 - ca^* = 0 \implies a^* = 1/c$

基准情形: 公司最优合同

- 公司的最优化问题简化为选择某个最优行动 a
- 将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w] = a - C(a) + \frac{\ln(-U)}{r}$
- 公司的最优化问题: $\max_{a \geq 0} a - ca^2/2$
- 一阶条件: $1 - ca^* = 0 \implies a^* = 1/c$

无道德风险时, 公司的最优合同:

$$a^* = \frac{1}{c} \quad w^* = -\frac{\ln(-U)}{r} + \frac{1}{2c}$$

基准情形: 第一最优 (First-best) 结果

- 无道德风险时, 均衡结果实现了最大化社会总福利的**第一最优** (first-best) 分配.
 - 这里的“社会”只包括两个参与者: 张三和公司

基准情形: 第一最优 (First-best) 结果

- 无道德风险时, 均衡结果实现了最大化社会总福利的**第一最优** (first-best) 分配.
 - 这里的“社会”只包括两个参与者: 张三和公司
- 最大化社会福利体现在两个方面:
 1. 努力选择 a^* 是社会最优的, 即它的社会边际成本 = 社会边际收益
 - 努力的边际成本为 $C'(a^*) = 1$
 - 由于 $q = a + \varepsilon$, 努力的边际收益恒定为 1

基准情形: 第一最优 (First-best) 结果

- 无道德风险时, 均衡结果实现了最大化社会总福利的**第一最优** (first-best) 分配.
 - 这里的“社会”只包括两个参与者: 张三和公司
- 最大化社会福利体现在两个方面:
 1. 努力选择 a^* 是社会最优的, 即它的社会边际成本 = 社会边际收益
 - 努力的边际成本为 $C'(a^*) = 1$
 - 由于 $q = a + \varepsilon$, 努力的边际收益恒定为 1
 2. 风险的分配方式是社会最优的
 - 张三拿固定工资 w^* , 不承担任何风险; 公司承担所有风险.
 - 解释: 由于张三是风险厌恶的, 而公司是风险中性的, 让张三承担风险一定不是社会最优的.

基准情形: 第一最优 (First-best) 结果

- 我们接下来会看到, 当存在道德风险问题时:
 - 张三的均衡努力程度不再是社会最优的;
 - 同时, 均衡中张三也会承担风险 (因为张三的工资会和产出 q 挂钩)
- 一般称上述包含道德风险的均衡结果是**第二最优的** (second-best).
- 相较于第一最优的基准情形结果, 包含道德风险时的均衡存在福利损失.
 - 这类福利损失一般可以笼统地归结为由信息不对称所导致

关于术语翻译: First-best 和 second-best

- 有些资料将 first-best 翻译为“最优”，将 second-best 翻译为“次优”。
- 我反对将 first-best 翻译为“最优”，因为它会和最优反应中的最优 (optimal) 搞混。显然, first-best 的意思和 optimal 的意思非常不同。
 - 我个人偏好将 first-best 直译为“第一最优”，这也是部分中文书籍使用的翻译。
- 不过, second-best 这个词翻译成“第二最优”或“次优”似乎都没有问题。由于“次优”比较好读, 我在口头交流中也经常用这个翻译。

题外话: “first-best” 和 “second-best” 这两个术语, 至少可以追溯到柏拉图和亚里士多德这对师徒关于知识论 (如何获取真理) 和政治哲学 (何为最佳政体) 的讨论.

限于课时, 我们不做进一步展开. 不过, 如果同学们此前没有读过柏拉图的作品, 建议务必读一读《理想国》与《斐多篇》. 如此, 大学生活也算没有虚度.