证明 Kuhn-Tucker 定理

定理 (Kuhn-Tucker). 若存在 $x^* = (x_1^*, ..., x_k^*)$ 和 $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_n^*)$ 使得

$$\min_{\lambda \geq 0} d(\lambda) = \min_{\lambda \geq 0} \max_x L(x, \lambda) = L(x^*, \lambda^*)$$

则 x^* 为原最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解.

由于 (x^*, λ^*) 满足 $\min_{\lambda \geq 0} \max_x L(x, \lambda) = L(x^*, \lambda^*)$, (x^*, λ^*) 为函数 $L(x, \lambda)$ 的鞍点 (saddle point). 证明的核心在于利用鞍点的如下性质:

$$L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda), \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \geq 0$$

我们从这两个不等式出发, 依次说明:

- x^* 是可行的, 即它没有违反任何约束
- 互补松弛性: $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0$, $j = 1, ..., n$
- 对任意可行的 $x \in D$, 均有 $f(x^*) \geq f(x)$

1. 第一步: 证明 x^* 的可行性

观察右侧不等式: $L(x^*, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda)$. 展开拉格朗日函数后可得:

$$f(x^*) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* g_j(x^*) \leq f(x^*) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(x^*)$$

消去 $f(x^*)$ 并移项, 得到:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(x^*) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* g_j(x^*)$$

反设 x^* 违反了某个约束: $g_k(x^*) > 0$. 我们可以让 $\lambda_k \to \infty$, 不等式左边将趋于正无穷. 矛盾

2. 第二步: 证明互补松弛性

由于不等式 $\sum \lambda_j g_j(x^*) \leq \sum \lambda_j^* g_j(x^*)$ 对任意 $\lambda \geq 0$ 都成立, 令 $\lambda = 0$:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* g_j(x^*)$$

由于我们已经证明了 $g_j(x^*) \leq 0$, 且已知 $\lambda_j^* \geq 0$, 那么每一项 $\lambda_j^* g_j(x^*)$ 都必定 ≤ 0. 要使它们的和 ≥ 0, 唯一的可能就是每一项都等于 0:

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j$$

这意味着 $L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) - 0 = f(x^*)$.

3. 第三步: 证明最优性

观察左侧不等式: $L(x, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*)$, 代入互补松弛性的结果 $L(x^*, \lambda^*) = f(x^*)$:

$$f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* g_j(x) \leq f(x^*)$$

对任意可行的 x, 有 $g_j(x) \leq 0$. 又因为 $\lambda_j^* \geq 0$, 所以 $-\sum \lambda_j^* g_j(x) \geq 0$. 由此可得:

$$f(x) \leq f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* g_j(x) \leq f(x^*)$$

即对于所有可行解 x, 都有 $f(x) \leq f(x^*)$. QED.