

## 参考答案: 作业 4

### 1. 留作习题的课堂练习

#### 1(a) 二元信号博弈

- 分离均衡中, 雇主可以识别不同类型的求职者, 支付给低类型和高类型求职者的工资分别为  $w_L = 1$  和  $w_H = 2$ . 为确保均衡成立, 此时我们只需检查求职者的激励相容条件.

高类型求职者的激励相容条件:

$$w_H - E^*/2 \geq w_L \implies E^* \leq 2$$

低类型求职者的激励相容条件:

$$w_L \geq w_H - E^* \implies E^* \geq 1$$

综上, 分离均衡当且仅当  $E^* \in [1, 2]$  时存在.

- 对教育征税时, 高类型求职者的激励相容条件变为

$$w_H - E^*/2 - tE^* \geq w_L \implies E^* \leq \frac{1}{t + 1/2}$$

低类型求职者的激励相容条件变为:

$$w_L \geq w_H - E^* - tE^* \implies E^* \geq 1/(1 + t)$$

综上, 分离均衡当且仅当  $E^* \in [1/(1 + t), 1/(0.5 + t)]$  时存在.

#### 1(b) 教育具有人力资本功能情形

- 有效分离均衡中, 两类求职者的教育选择  $E_1^*$  和  $E_2^*$  都是社会最优的, 企业支付的工资分别为  $s_1(E_1^*)$  和  $s_2(E_2^*)$ . 我们需要证明, 高类型求职者 (类型 2) 不愿意伪装为低类型求职者:

$$s_2(E_2^*) - c_2(E_2^*) \geq s_1(E_1^*) - c_2(E_1^*). \quad (IC_2)$$

证明步骤如下. 由于  $E_2^*$  是社会最优的教育选择, 因此有

$$s_2(E_2^*) - c_2(E_2^*) \geq s_2(E_1^*) - c_2(E_1^*).$$

对比上式和  $(IC_2)$  可知, 我们只需验证  $s_2(E_1^*) - c_2(E_1^*) \geq s_1(E_1^*) - c_2(E_1^*)$ , 它的成立是显然的.

- 社会最优教育水平  $E^*(z)$  为如下最优化问题的解:

$$\max_{E \geq 0} zS_1(E) + (1 - z)S_2(E) - [zC_1(E) + (1 - z)C_2(E)]$$

一阶条件如下:

$$0 = zS_1'(E^*) + (1 - z)S_2'(E^*) - [zC_1'(E^*) + (1 - z)C_2'(E^*)] \equiv F(E^*, z)$$

方程  $F(E^*, z) = 0$  决定了最优教育选择  $E^*$  和类型  $z$  的关系, 下面用隐函数求导法则来验证  $E^*$  关于  $z$  递减.

$$\begin{aligned}\frac{dE^*}{dz} &= -\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial E^*} \\ &= \frac{s'_2(E) - c'_2(E) - (s'_1(E) - c'_1(E))}{z(s''_1(E) - c''_1(E)) + (1-z)(s''_2(E) - c''_2(E))}\end{aligned}\quad (1)$$

由模型假设可知, 表达式 (1) 的分子为正, 分母为负. 因此,  $\frac{dE^*}{dz} < 0$ .

### 1(c) 信息披露模型

卖家有三种可能类型:  $t \in \{G, B, U\}$ .

1. 知情高质量卖家 (记为  $G$ ), 先验概率为  $\kappa\gamma$ ;
2. 知情低质量卖家 (记为  $B$ ), 先验概率为  $\kappa(1-\gamma)$ ;
3. 不知情 (Uninformed) 卖家 (记为  $U$ ), 先验概率为  $1-\kappa$ .

均衡中, 卖家有两种可能的信息披露方式:

- 披露好信息 ( $\theta = \theta_G$ )
- 披露空信息 ( $\theta \in \{\theta_G, \theta_B\}$ , 即不披露任何额外信息)

均衡的完整描述如下:

#### 1. 消费者后验信念

- 若消费者收到好信息, 则以概率一相信卖家为知情高质量卖家 ( $t = G$ )
- 若消费者收到空信息, 其关于卖家类型的后验信念为  $(q_G, q_B, q_U)$ :

$$q_G = \Pr[t = G \mid \text{空信息}] = 0$$

$$q_U = \Pr[t = U \mid \text{空信息}] = \frac{1-\kappa}{\kappa(1-\gamma) + 1-\kappa}$$

$$q_B = \Pr[t = B \mid \text{空信息}] = 1 - q_U = \frac{\kappa(1-\gamma)}{\kappa(1-\gamma) + 1-\kappa}$$

2. 消费者策略. 给定任意后验信念  $(\hat{q}_G, \hat{q}_B, \hat{q}_U)$ , 消费者的策略如下: 若价格高于

$$\hat{q}_G\theta_G + \hat{q}_B\theta_B + \hat{q}_U(\gamma\theta_G + (1-\gamma)\theta_B)$$

则拒绝购买商品; 否则愿意购买商品.

#### 3. 卖方信息披露策略

- 类型  $G$  披露好消息
- 类型  $B$  和  $U$  不披露额外信息

#### 4. 卖方定价策略

- 类型  $G$  定高价  $p_G = \theta_G$ .
- 类型  $B$  和  $U$  定低价  $p_B$ ,

$$\begin{aligned}p_B &= q_G\theta_G + q_B\theta_B + q_U(\gamma\theta_G + (1-\gamma)\theta_B) \\ &= \frac{(1-\kappa)[\gamma\theta_G + (1-\gamma)\theta_B] + \kappa(1-\gamma)\theta_B}{(1-\kappa) + \kappa(1-\gamma)}\end{aligned}$$

均衡结果中, 消费者总是愿意接受卖家的价格并购买商品. 由于消费者的后验信念都是通过贝叶斯法则得到的, 并且每个类型的卖家均没有偏离均衡路径的激励, 因此上述 (策略, 后验信念) 共同构成精炼贝叶斯均衡.

## 2. 金融市场中的信号传递

### (2a) 两类企业均发行新股

由于两类企业均发行新股, 投资者维持先验信念, 资产的期望价值为:

$$0.1 \times 100 + 0.9 \times 50 = 55.$$

投资者要求的最低股权比例  $\alpha$  为:

$$(55 + 30)\alpha = 20 \Rightarrow \alpha = 4/17.$$

对于  $A = 50$  的企业, 相比于不融资的情形, 其选择发行新股融资的净收益为:

$$(1 - \alpha)(50 + 30) - 50 = \frac{190}{17}.$$

对于  $A = 100$  的企业, 其净收益为:

$$(1 - \alpha)(100 + 30) - 100 = -\frac{10}{17} < 0$$

高价值企业净收益为负, 因此不会发行新股, 故投资者“两类企业均发行新股”的信念无法自我验证.

### (b) 仅低价值企业发行新股

由于此时仅有低价值企业发行新股, 投资者会以概率一认为发行新股的企业资产价值为  $A = 50$ . 此时其要求的最低股权比例为

$$\alpha = \frac{20}{50 + 30} = 1/4.$$

低价值企业净收益为  $(1 - 0.25) \times 80 - 50 = 60 - 50 = 10$ . 高价值企业未发行新股, 其净收益为 0.

若高价值企业也发行新股, 其净收益为:

$$130(1 - \alpha) - 100 = -2.5 < 0.$$

因此, 高价值企业不会发行新股, 只有低价值企业发行新股. 投资者的信念是自我验证的.

### (c) 通过浪费性广告支出传递信号

考虑如下分离均衡: 高价值企业选择支出  $K = K^*$ , 低价值企业不支出 ( $K = 0$ ). 均衡结果如下:

- 若  $K = 0$ , 投资者认为企业为低价值企业, 并索取股权  $\alpha_L = 1/4$ . 此时企业的净收益为 10, 和上一小问相同.
- 若  $K = K^*$ , 投资者认为企业为高价值企业, 并索取股权

$$\alpha_H = 20/(100 + 30 - K^*) = 20/(130 - K^*)$$

高价值企业的净收益为

$$(1 - \alpha_H)(130 - K^*) - 100 = 10 - K^*.$$

为确保分离均衡成立, 我们分别考察两类企业的参与约束和激励相容约束.

### 参与约束

- 高价值企业的参与约束要求  $K^* \leq 10$ ,
- 低价值企业的参与约束总是满足的.

### 激励相容约束

- 低价值企业的激励相容约束:

$$10 \geq (1 - \alpha_H)(80 - K^*) - 50 \implies K^* \geq 65 - 5\sqrt{129}$$

- 高价值企业的激励相容约束:

$$10 - K^* \geq (1 - \alpha_L)(130 - K^*) - 100 \implies K^* \leq 50$$

综上, 当  $K^*$  低于 10, 高于 \$ 65 - 5 \$ ( $\approx 8.2$ ) 时, 分离均衡成立. 此时两类企业都可以成功融资, 从而避免了此前只有低价值企业才进行融资的逆向选择现象.