作业 3

1. 有限责任下的最优工资合同

考虑如下委托代理模型:

- 代理人可以选择高努力 $e = H$ 或低努力 $e = L$
  - 高努力的成本为 $c = 2$, 低努力成本为 0.
- 产出有两种结果: 成功($q = 10$)或失败($q = 0$). 成功的概率依赖于努力:
  - 高努力时, 成功概率 $p_H = 0.6$, 失败概率 0.4;
  - 低努力时, 成功概率 $p_L = 0.4$, 失败概率 0.6.
- **有限责任:** 代理人的工资永远不能为负.
  - **说明:** 这个 "工资非负" 的设定一般被称为有限责任制, 该假设意味着委托人的最优化问题将出现关于工资的额外约束.

委托人只能根据产出支付工资: 成功时支付 w_1, 失败时支付 w_0. 委托人和代理人都是风险中性的. 代理人的效用函数为工资减去努力成本 (风险中性), 保留效用 (即不接受合同时的效用)为 $\bar{U} = 0$. 委托人的利润为产出减去工资.

委托人希望诱导代理人选择高努力, 并设计工资合同 (w_1, w_0) 以最大化期望利润.

1. 写出委托人的最优化问题 (目标函数和所有约束条件: 参与约束 IR、激励相容约束 IC、非负工资约束).
2. 写出该问题的 Kuhn-Tucker 条件 (拉格朗日函数、一阶条件、互补松弛条件).
3. 求解最优工资合同 (w_1^*, w_0^*), 并计算所有拉格朗日乘子的值.
4. 解释每个乘子 (影子价格) 的经济含义.

2. 逆向选择与二手车市场

在二手车市场中, 只有卖方知道自己的汽车真实质量 θ. 消费者无法观测质量, 只知道 θ 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布. 假设卖方无法向消费者提供可信的信息, 此时市场只能形成单一价格 p.

消费者对质量为 θ 的汽车估值为 1.5θ (即他购买汽车后获得的收益为 1.5θ), 其支付价格 p 后的效用为 $1.5\theta - p$. 卖方对质量为 θ 的汽车估值为 θ. 如果交易发生, 卖方的效用为 $p - \theta$.

由上述设定可知: 当且仅当 $\theta \leq p$ 时, 卖方才愿意出售.

1. 当价格为 $p > 0$ 时, 计算待售汽车的平均质量 $\mathbb{E}[\theta \mid \theta \leq p]$.
2. 假设交易以价格 p 发生, 写出消费者购买汽车时的期望效用表达式. 并进一步说明: 对任意 $p > 0$, 该期望效用均为负.
3. 根据上述分析, 说明市场均衡时会发生什么现象: 哪些质量的二手车会被交易? 交易价格是?