

## 参考答案: 作业 3

### 有限责任下的最优工资合同 (1)

委托人的最优化问题如下:

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} 0.6(10 - w_1) + 0.4(0 - w_0)$$

约束条件:

$$0.6w_1 + 0.4w_0 - 2 \geq 0 \quad (IR)$$

$$0.6w_1 + 0.4w_0 - 2 \geq 0.4w_1 + 0.6w_0 \quad (IC)$$

$$w_1 \geq 0, w_0 \geq 0 \quad (LL)$$

其中, (IR) 为个体理性约束 (参与约束), (IC) 为激励相容约束, (LL) 为有限责任 (Limited Liability) 下的工资非负约束。

### 有限责任下的最优工资合同 (2)

拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L = & -0.6w_1 - 0.4w_0 + \\ & \lambda_1(0.6w_1 + 0.4w_0 - 2) + \\ & \lambda_2(0.2w_1 - 0.2w_0 - 2) + \\ & \lambda_3w_1 + \lambda_4w_0 \end{aligned}$$

对应的 Kuhn-Tucker 条件如下:

(1) 一阶条件:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = -0.6 + 0.6\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = -0.4 + 0.4\lambda_1 - 0.2\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

(2) 可行域:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0.6w_1 + 0.4w_0 - 2 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0.2w_1 - 0.2w_0 - 2 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = w_1 \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = w_0 \geq 0$$

(3) 互补松弛:

$$\begin{aligned}\lambda_1(0.6w_1 + 0.4w_0 - 2) &= 0 \\ \lambda_2(0.2w_1 - 0.2w_0 - 2) &= 0 \\ \lambda_3w_1 &= 0, \quad \lambda_4w_0 = 0\end{aligned}$$

(4) 乘子非负:

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0$$

### 有限责任下的最优工资合同 (3)

(IC) 约束等价于

$$w_1 - w_0 \geq 10$$

因此,  $w_1$  严格高于  $w_0$ . 另一方面, 由于工资  $w_0$  非负, 工资  $w_1$  一定严格大于零. 此时, 约束  $w_1 \geq 0$  是松的, 其对应的乘子  $\lambda_3$  一定为 0.

由于  $w_1$  严格为正且  $w_0$  非负, 根据 (IC) 约束可知

$$0.6w_1 + 0.4w_0 - 2 \geq 0.4w_1 + 0.6w_0 > 0.$$

因此, (IR) 约束一定是松的, 其对应的拉格朗日乘子  $\lambda_1$  为零.

接下来论证均衡中  $w_0 = 0$ . 反设  $w_0 > 0$ , 由于工资  $w_1$  也严格大于零, 委托人可以同时降低  $w_1$  和  $w_0$ , 在不违背约束 (IR, IC, LL) 的同时提高均衡利润. 矛盾.

- **补充说明:** 在我们此前的道德风险模型中, 代理人均衡效用一般总是等于其保留效用, 此时 (IR) 约束为紧. 但在这个练习中, 由于工资非负这个设定, 委托人不得不选择正的工资  $w_1$  以及非负的  $w_0$ , 这使得代理人的均衡效用一定严格高于其保留效用 (0).

接下来, 我们说明约束 (IC) 一定是紧的. 如若不然, 委托人可以适当降低工资  $w_1$ , 在不违背约束 (IR, IC, LL) 的同时提高均衡利润. 矛盾.

将  $w_0 = 0$  代入紧的 (IC) 约束, 可得  $w_1 = 10$ . 进一步, 四个拉格朗日乘子分别为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1.$$

### 有限责任下的最优工资合同 (4)

拉格朗日乘子 (影子价格) 的经济学含义: 放松一单位约束条件 (即调整外生参数使约束更容易满足) 所能带给委托人的边际利润.

(IR) 约束的乘子为  $\lambda_1 = 0$ .

- 这意味着, 降低一单位代理人的保留效用不能提高委托人的利润.

(IC) 约束的乘子为  $\lambda_2 = 3$ .

- 这意味着, 放松一单位激励相容约束能提高 3 个单位的委托人利润.

(LL) 约束的乘子分别为  $\lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1$ .

- 这意味着, 放松一单位约束  $w_1 \geq 0$  不能提高委托人利润; 放松一单位约束  $w_0 \geq 0$  能提高 1 个单位的委托人利润.

### 逆向选择与二手车市场 (1)

给定任意价格  $p > 0$ , 仅有质量为  $\theta \leq p$  的二手车进入市场. 平均质量为

$$\mathbb{E}[\theta \mid \theta \leq p] = p/2.$$

### 逆向选择与二手车市场 (2)

若交易发生, 消费者的期望效用为

$$1.5\mathbb{E}[\theta \mid \theta \leq p] - p = \frac{1.5p}{2} - p < 0, \quad \forall p > 0$$

### 逆向选择与二手车市场 (3)

均衡中, 二手车市场完全崩溃: 没有二手车会被交易.

- 注: 回答只有质量为  $\theta = 0$  的二手车被交易也可以, 由于模型中的状态构成连续区间,  $\theta = 0$  的二手车的测度为零. 因此, 这个答案其实等同于没有二手车会被交易.