

## 作业 2

### 1. 留作习题的课堂练习

- 阅读课程资料《道德风险基本模型》中的保险市场模型, 证明均衡中张三的投保金额为**全险**:  $C = L$ .
- 阅读课程资料《最优激励合同 (二元情形)》, 证明最优化问题的解中 (IC) 约束是紧的.
  - 注: 课程资料中已经给出了微扰法证明的大致框架.
- 假设  $Y$  服从对数正态分布:  $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 本问题涉及计算  $Y$  的期望, 从下面两小问中选择一问回答即可. 如果选择第二问, 需在作业中提交代码脚本以及运行结果, 结果请以图或表的形式呈现 (最好是图), 且应能直观体现样本均值随  $\sigma^2$  递增的趋势.
  - 问一:** 推导  $\mathbb{E}[Y] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ .
  - 问二:** 使用任何你喜欢的计算工具 (MatLab/Python/R/...), 用数值仿真验证  $Y$  的期望关于  $\sigma^2$  递增. 具体地, 你需要完成如下步骤:
    - 令  $\sigma^2 = 1$ , 从分布  $N(0, \sigma^2)$  抽取  $N = 1000$  个样本:  $z_1, \dots, z_N$ .
    - 令  $y_i = \exp(z_i)$ , 计算  $\{y_i\}_{i=1}^N$  的样本均值  $\bar{y} = \sum_{i=1}^N y_i / N$ .
    - 另取  $\sigma^2 = 3, 6, 9, 12$ , 重复上述过程, 验证你得到的样本均值关于  $\sigma^2$  递增.

你应该在你的代码脚本中, 将上述过程封装为一个函数: 函数的输入是正态分布的方差, 输出是样本均值.

如果你选择使用 Python, 可以参考下面的 Python 示例代码. 示例代码计算了方差为 4 时的样本均值  $\bar{y}$ , 你可以将它封装为一个函数, 函数的输入是正态分布的方差, 输出则是对数正态分布的样本均值, 再进一步验证样本均值关于方差递增即可.

```
from scipy.stats import norm
import numpy as np

# 设定参数
N = 1_000
mean = 0
variance = 4
std_dev = np.sqrt(variance)

# 数据生成
data = norm.rvs(loc=mean, scale=std_dev, size=N)
data = np.exp(data)

# 计算均值
sample_mean = np.mean(data)

print(f"Sample mean: {sample_mean}")
```

### 2. 多任务情形下的最优线性合同

考虑如下包括公司(委托人)和张三(代理人)的委托代理模型. 博弈双方都是风险中性的, 且保留效用均为 0.

张三选择某个努力水平  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$ . 注意, 这里张三的行动  $a$  是二维的, 你可以理解为张三在承担两个项目. 项目 1 的产出为  $q_1$ , 投入为  $a_1$ ; 项目 2 的产出为  $q_2$ , 投入为  $a_2$ .

给定张三努力水平  $(a_1, a_2)$ , 产出  $q = (q_1, q_2)$  的生成机制如下:

$$q_1 = a_1 + e_1, \quad q_2 = a_2 + e_2$$
$$e_1, e_2 \sim N(0, \sigma^2), \text{ 且 } e_1 \text{ 和 } e_2 \text{ 独立.}$$

张三的努力成本为

$$c(a_1, a_2) = (a_1^2 + a_2^2)/2 + ka_1a_2$$

其中  $k \in [-1, 1]$  为外生参数. 公司的最终利润为  $q_1 + \varphi q_2 - w$ , 其中  $\varphi > 0$  为外生参数,  $w$  表示支付给张三的工资; 张三的最终效用为  $w - c(a_1, a_2)$ .

1. 假设不存在道德风险问题, 描述此时博弈的第一最优结果. 你只需描述第一最优结果中张三的努力程度  $(a_1, a_2)$  即可.
2. 假设存在道德风险问题, 且公司提供如下线性合同:  $w(q_1, q_2) = w_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2$ . 计算公司的最优线性合同以及张三的努力程度.
3. 承接上一小问, 假设工资合同不能依赖于  $q_2$ , 只能依赖于  $q_1$ :  $w(q_1) = w_0 + \beta_1 q_1$ . 计算此时公司的最优线性合同.
4. 比较 (2) 和 (3) 中的结果, 解释均衡中公司最优合同的差异.