参考答案: 作业 2

1(a)
固定任意张三的努力水平 e, 由保险公司的零利润条件可知:

$$\pi = 1 - p(e)$$

好状态和坏状态下, 张三的事后货币化收入分别为:

- $y_G(C) = y - \pi C$
- $y_B(C) = y - \pi C + C - L$

张三的期望效用为

$$U(C) = p(e)u(y_G(C)) + [1-p(e)]u(y_B(C)) - e, \quad C \in [0, L]$$

微分可得:

$$U'(C) = p(e)u'(y_G(C))(-\pi) + [1-p(e)]u'(y_B(C))(1-\pi)$$

将零利润条件 $p(e) = 1 - \pi$ 代入上式:

$$U'(C) = \pi(1-\pi)(u'(y_B) - u'(y_G))$$

由于 $u'(\cdot)$ 是严格递减的, 且 $y_B < y_G$ 对所有 $C \in (0, L)$ 均成立, 买入更多的保险带给张三的边际效用总是正的. 因此, 张三会不断买入保险直至 $C = L$; 此时 $y_G = y_B$, 即张三对于火灾是否发生是无差异的.

关于 1(a) 的两点补充说明:

(a) 部分同学直接套用一阶条件得到 $C = L$, 而没有其它额外说明. 这个做法是不严谨的, 因为该最优化问题的解是角点解 (C 的取值范围是 $[0, L]$), 此时不能直接套用一阶条件.

(b) 该练习仅讨论了二元状态的情形, 但它的主要结论 (均衡时张三对所有可能结果无差异) 对于一般的状态空间仍然成立. 其主要逻辑如下:

  (a) 令随机变量 y 表示张三的事后货币化收入. 保险公司的零利润条件意味着, 无论张三事前购买多少单位的保险, 其平均货币收入 ($\mathbb{E}[y]$) 都是恒定的 (想想为什么).
  (b) 由于张三是风险厌恶的, 有 $\mathbb{E}[u(y)] \leq u[\mathbb{E}(y)]$, 这个期望效用的上界 $u[\mathbb{E}(y)]$ 当且仅当 y 的分布为退化分布时才能达到.
  (c) 因此, 均衡中张三会买入足够多的保险, 使得每个可能状态下其事后效用均相同.

  这个结论由 Arrow 在其 1963 年的一篇论文中提出. 关于这个结论, 曾有一个颇为流行的笑话: 某经济学家要出远门参加会议, 不得不乘坐飞机. 经济学家的伴侣非常担心其安危, 该经济学家的反应是: "这说明你给我买的保险还不够多; 否则, 你应该对我能否平安回家无差异才对."

1(b) and 1(c)
略

2(a) 第一最优解
由于参与人都是风险中性的, 我们可以忽略风险的分配方式, 社会总剩余可直接由委托人的期望利润减去代理人的努力成本得到:

$$S(a_1, a_2) = a_1 + \varphi a_2 - c(a_1, a_2) = a_1 + \varphi a_2 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - k a_1 a_2$$

第一最优解由最大化总剩余 $S(a_1, a_2)$ 得到, 对应的一阶条件分别为:

$$1 - a_1 - ka_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 + ka_2 = 1,$$

$$\varphi - a_2 - ka_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad ka_1 + a_2 = \varphi.$$

- 上面两个等式的经济学含义, 都是边际成本等于边际产出. 由于成本函数存在交叉项 (ka_1a_2), 提高一单位 a_1 的边际成本不仅取决于 a_1, 还取决于 a_2.

联立方程可得社会最优解 (符号 FB 表示第一最优 (first-best)):

$$a_1^{\mathrm{FB}} = \frac{1 - k\varphi}{1 - k^2}, \qquad a_2^{\mathrm{FB}} = \frac{\varphi - k}{1 - k^2}.$$

- **说明:** 为了确保这个内点解存在, 我们还需要假设 $1 - k\varphi > 0$ $\varphi - k > 0$ 以及 $k \in (-1, 1)$. 否则, 可能会出现第一最优行动为 0 或正无穷的情形.

实现第一最优解的工资合同: 委托人向代理人支付固定工资 $w^* = c(a_1^{\mathrm{FB}}, a_2^{\mathrm{FB}})$, 此时代理人的 IR 约束是紧的, 其期望效用为 0; 委托人获得全部剩余 $S(a_1^{\mathrm{FB}}, a_2^{\mathrm{FB}})$.

2(b) 最优线性合同

记工资合同为 $w(q_1, q_2) = w_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2$. 代理人期望效用为:

$$\mathbb{E}[w] - c(a_1, a_2) = w_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - ka_1a_2.$$

激励相容条件的一阶条件:

$$a_1 + ka_2 = \beta_1, \qquad ka_1 + a_2 = \beta_2.$$

- 该一阶条件在形式上与第一最优解的一阶条件完全相同, 只是等号右侧从边际产出替换为奖金率 β_1, β_2.

为了最大化总剩余, 委托人选择 $\beta_1 = 1$ 和 $\beta_2 = \varphi$. 这恰好诱导出第一最优的努力水平 a_1^{FB} 和 a_2^{FB}. 同时, 通过适当的基本工资 w_0 使参与约束取等号后, 委托人的期望利润仍等于总剩余 $S(a_1, a_2)$.

最优基本工资由紧的 IR 约束确定:

$$w_0^* = c(a_1^{\mathrm{FB}}, a_2^{\mathrm{FB}}) - a_1^{\mathrm{FB}} - \varphi a_2^{\mathrm{FB}}.$$

此时, 最优线性合同实现了第一最优结果.

补充说明:

- 本小问的结论说明, 仅存在道德风险问题并不一定会导致福利损失; 委托人和代理人不同的风险偏好设定同样至关重要. 本问题中, 委托人只能依靠产出来监督代理人, 但由于代理人也是风险中性的, 让其承担风险不会带来福利损失.
- 本小问的均衡有一个非常形象的描述: 委托人将公司按价格 $-w_0$ 卖给代理人, 代理人自己当老板并获得自己劳动的所有产出.

2(c) q_2 不可直接监督

当 q_2 不可直接监督时, 线性合同形式变为 $w = w_0 + \beta_1 q_1$, 即 $\beta_2 = 0$.

激励相容约束的一阶条件变为:

$$a_1 + ka_2 = \beta_1, \qquad ka_1 + a_2 = 0$$

由于努力程度是非负的, 代理人的最优行动 a_2 可能是角点解. 在正式求解前, 我们先通过一些简单的定性讨论来猜测解的性质:

- 当 $k < 0$ 时, 较高的 a_2 可以降低 a_1 的边际成本. 此时, 即使委托人没有对 q_2 给出奖励, 代理人也可能会选择正的 a_2, 因为正的 a_2 可以降低任务 1 投入的边际成本.
- 当 $k > 0$ 或 $k = 0$ 时, 员工没有任何激励对任务 2 投入努力, 此时均衡中一定有 $a_2 = 0$.

两种情形下的均衡:

1. **情形 $k \geq 0$ (努力彼此替代或独立)**. 此时代理人在任务 2 上投入的边际净收益恒为负, 最优解为角点解 $a_2^* = 0$. 代理人在任务 1 上的投入由一阶条件决定: $a_1 = \beta_1$.

   委托人最大化总剩余 $S = a_1 - a_1^2/2$, 由一阶条件可知均衡中 $\beta_1^* = a_1^* = 1$. 为了满足参与约束, 基本工资设定为 $w_0^* = \frac{1^2}{2} - 1 \cdot 1 = -0.5$. 此时最优线性合同的所有参数均和 k 的具体取值无关.

2. **情形 $k < 0$ (努力彼此互补)**. 根据 IC 约束关于 a_2 的一阶条件, 有 $a_2 = -ka_1$. 代入 IC 约束关于 a_1 的一阶条件, 有 $a_1 = \frac{\beta_1}{1-k^2}$, 进一步可得 $a_2 = -\frac{k\beta_1}{1-k^2}$.

   委托人最大化总剩余 $S(a_1(\beta_1), a_2(\beta_1))$, 对 β_1 求导得到最优解

   $$\beta_1^* = 1 - k\varphi.$$

   此时,

   $$a_1^* = a_1^{\mathrm{FB}}, \qquad a_2^* = -ka_1^{\mathrm{FB}} = \frac{-k(1-k\varphi)}{1-k^2}.$$

   基本工资为 $w_0^* = c(a_1^*, a_2^*) - \beta_1^* a_1^*$.

2(d) 最优合同的比较及直观解释

两种产出均可写进工资合同的情形: $\beta_1^* = 1$, $\beta_2^* = \varphi$

- **直观解释:** 委托人将每项任务的全部边际价值"送"给代理人(β_i 等于社会边际收益) 来作为激励, 仅通过负的基本工资 w_0 来获取正利润. 该合同实现了第一最优解.

当 q_2 不可写进工资合同时, 委托人失去了奖金率 β_2 这一重要激励工具 . 但如果努力彼此互补, 委托人还可以靠 β_1 来激励行动 a_2. 此时最优合同取决于 k 的正负性.

若 $k < 0$, 则 $\beta_1^* = 1 - k\varphi$. 此时的奖金率甚至高于任务 1 投入的边际产出.

- **直观解释:** $k < 0$ 意味着努力彼此互补, 互补性使得委托人愿意 **过度激励** 产出 q_1, 从而通过负的交叉项间接刺激任务 2 的投入 a_2. 并且, 额外的激励部分 $(-\varphi k)$ 正比于总剩余中投入 a_2 的回报率 (φ) 以及交叉收益率 $(-k)$.

若 $k = 0$ 或 $k > 0$, 则 $\beta_1^* = 1$, 并且均衡中代理人对任务 2 的投入为 0.

- **直观解释:** 当努力彼此替代或独立时, 仅通过奖金率 β_1 无法激励行动 a_2, 代理人一定会选择 $a_2^* = 0$. 因此, 模型退化为单任务情形, 最优奖金率 β_1^* 等于任务 1 投入的边际产出.