

作业一

1. 记张三和李四的 vNM 效用函数分别为 $u(x)$ 和 $v(x)$. 请证明, 若存在递增的严格凹函数 $g(\cdot)$ 使得 $v(x) = g(u(x))$, 则李四的绝对风险规避永远高于张三.
 - 注: 这个练习来自“货币偏好和风险规避”部分的教学. 证明过程中, 你总是可以假设函数是可微的.
2. 本练习来自“vNM 公理化”部分的教学:
 - (1) 请证明, 当集合 Z 至少包含三个元素时, 悲观偏好不是连续的.
 - (2) 请证明, 期望效用偏好是连续的.
3. 考虑决策者关于货币的偏好. 在金融学中, 一种常见的偏好表示方法, 是只关注彩票 p 的期望 E_p 和方差 V_p , 即彩票 p 带给投资者的效用 $u(p)$ 只取决于其期望和方差.
 - (1) 令 $u(p) = E_p - V_p/4$. 证明: 此时投资者的偏好关系不是期望效用偏好, 即它违背了某个 vNM 公理. (提示: 考虑彩票 $(1 \circ \$100)$ 和 $(0.5 \circ \$0, 0.5 \circ \$400)$ 分别与彩票 $(0.5 \circ \$0, 0.5 \circ \$200)$ 的复合).
 - (2) 令 $u(p) = E_p - (E_p)^2 - V_p$. 证明: 此时投资者的偏好关系是期望效用偏好, 即写出此时的 vNM 效用函数 $v(x)$, 其中 x 为货币数. (提示: 对任意随机变量 x , $\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$)
4. 下面是 DeepSeek 于 2026-03-12, 对提示词“请简要介绍 vNM 期望效用理论”给出的回复, 请对照课程中“vNM 公理化”的教学部分, 挑出其中三处错误或不完善之处.

DeepSeek 的回复

vNM 期望效用理论 (Von Neumann-Morgenstern Expected Utility Theory) 是现代经济学, 尤其是博弈论和不确定性决策理论的基石。它由数学家约翰·冯·诺伊曼 (John von Neumann) 和经济学家奥斯卡·摩根斯坦 (Oskar Morgenstern) 在他们 1944 年合著的《博弈论与经济行为》一书中正式提出。

这个理论的核心目的是在不确定性的条件下, 理性决策者应该如何做选择。

以下是对该理论的简要介绍, 主要包括三个部分: 核心思想、公理体系和意义。

1. 核心思想: 期望效用最大化

vNM 理论的核心观点是: 当一个人面对风险 (即知道未来各种结果发生的概率) 做选择时, 他真正关心的是这些结果给他带来的“效用” (满足感或幸福感), 而不仅仅是金钱的数值。他最终会倾向于选择那个能让他获得“期望效用”最大的选项。

这里需要区分两个概念:

- **期望值:** 金钱收益的加权平均。例如, 50% 概率得 100 元, 50% 概率得 0 元, 期望值是 50 元。
- **期望效用:** 效用的加权平均。例如, 100 元带来的效用可能是 1, 0 元带来的效用可能是 0, 那么期望效用就是 $0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$ 。

vNM 理论认为, 人们的决策准则是最大化期望效用, 而不是最大化期望金钱值。

2. 理论基础: 三大关键公理

为了使这种决策方式成为“理性”的, vNM 提出了几条基本的偏好公理。只有当一个决策者的偏好满足这些条件时, 他的行为才可以用一个唯一的 vNM 效用函数来表示, 并且他会按照期望效用最大化来行动。主要包括:

1. **完备性**：你在任何两个选项（比如彩票 A 和彩票 B）之间，必须能做出比较。要么你偏好 A，要么偏好 B，要么觉得两者无差异。
2. **传递性**：你的偏好不能自相矛盾。如果你认为 A 优于 B，B 优于 C，那么你必须认为 A 优于 C。
3. **连续性**：这条公理保证了数学上的平滑性。如果 A 优于 B 优于 C，那么存在某个概率 (p)，使得“以概率 (p) 得 A，概率 (1-p) 得 C”这个彩票，与“确定得到 B”对你来说是同样好的。
4. **独立性（最关键的一条）**：如果两个彩票有相同的概率获得某个相同的结果，那么这部分相同的结果不应该影响你的选择。
 - 例子：假设你在两个选择之间犹豫：50% 概率去巴黎，50% 概率看电视；还是 50% 概率去罗马，50% 概率看电视。根据独立性公理，那“50% 概率看电视”的部分是相同的，你应该把注意力集中在比较“去巴黎”和“去罗马”上。如果单纯比较时你更喜欢巴黎，那么在带概率的情况下你也应该选择前者。

3. 主要意义与结论

- **建立了不确定性的分析框架**：它将决策问题数学化，使得经济学家可以用数学工具来严谨地分析人们在风险下的行为。
- **解释了风险态度**：vNM 理论通过**效用函数的形状**来定义人们对风险的态度。
 - **风险厌恶**：效用函数是凹的（比如赚 100 块带来的快乐，远小于亏 100 块带来的痛苦）。大多数人属于此类，会购买保险。
 - **风险中性**：效用函数是线性的。
 - **风险爱好**：效用函数是凸的（比如喜欢赌博的刺激）。
- **区分了货币价值与主观感受**：它解释了为什么人们会拒绝一个“期望值为正”的赌局（比如 50% 概率赢 200，50% 概率输 100，期望赚 50）。因为对于风险厌恶者来说，输钱的“痛苦”（效用损失）大于赢钱的“快乐”。

总结

vNM 期望效用理论提供了一套**关于理性决策的规范性标准**。它告诉我们：**如果一个人的偏好是理性的（满足上述公理），那么他的行为就好像是在试图最大化某个效用函数的期望值**。这个理论是后续几乎所有高级经济分析（如资产定价、保险市场、拍卖理论）的基础。