作业一答案

1. 绝对风险规避

记张三和李四的 vNM 效用函数分别为 $u(x)$ 和 $v(x)$, 且它们都是严格递增的. 请证明, 若存在递增的严格凹函数 $g(\cdot)$ 使得 $v(x) = g(u(x))$, 则李四的绝对风险规避永远高于张三. 证明过程中, 你总是可以假设函数是可微的.

设张三的效用函数为 u, 李四的效用函数为 v, 且存在递增的严格凹函数 g 使得 $v(x) = g(u(x))$. 假设 u 是递增且二阶可导的, 即 $u'(x) > 0$, 且 $u''(x)$ 存在. 绝对风险规避系数定义为:

$$A_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad A_v(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)}.$$

计算 v 的一阶和二阶导数:

$$v'(x) = g'(u(x))u'(x), \quad v''(x) = g''(u(x))[u'(x)]^2 + g'(u(x))u''(x).$$

代入绝对风险规避系数:

$$A_v(x) = -\frac{g''(u)(u')^2 + g'(u)u''}{g'(u)u'} = -\frac{u''}{u'} - \frac{g''(u)}{g'(u)}u'.$$

由 $g'(u) > 0$ 且 $g''(u) < 0$ 可知:

$$-\frac{g''(u)}{g'(u)}u' > 0,$$

从而

$$A_v(x) = A_u(x) + \left(-\frac{g''(u)}{g'(u)}u'\right) > A_u(x).$$

2. 悲观偏好与 vNM 公理

1. 请证明, 当集合 Z 至少包含三个元素时, 悲观偏好不是连续的.
2. 请证明, 期望效用偏好是连续的.

令 $Z = \{a, b, c\}$. 假设决策者的偏好 $\succeq$ 为悲观偏好, 且:

- $a \succ b \succ c$.

若决策者的偏好服从连续性, 应存在概率 $\alpha \in [0, 1]$ 使得:

- $L_\alpha = (\alpha \circ a, (1-\alpha) \circ c) \sim b$.

但由悲观偏好的定义可知, 决策者认为彩票 L_α 要么和退化彩票 $(1 \circ a)$ 无差异 (若 $\alpha = 1$), 要么和退化彩票 $(1 \circ c)$ 无差异 (若 $\alpha < 1$). 无论哪种情形, L_α 都不可能和 $(1 \circ b)$ 无差异.

假设决策者的偏好 $\succeq$ 为期望效用偏好, 令 $u : Z \to \mathbb{R}$ 为其 vNM 效用函数. 我们需要证明: 若决策者认为 $a \succ b \succ c$, 则一定存在概率 $\alpha \in [0, 1]$ 使得 $(\alpha \circ a, (1-\alpha) \circ c) \sim b$; 换言之, 存在 $\alpha \in [0, 1]$ 使得

$$\alpha u(a) + (1-\alpha)u(c) = u(b).$$

显然, 上式在 $\alpha = \frac{u(b)-u(c)}{u(a)-u(c)}$ 时成立. 由于 $u(a) > u(b) > u(c)$, $\alpha \in [0,1]$.

3. 期望效用偏好

考虑决策者关于货币的偏好. 在金融学中, 一种常见的偏好表示方法, 是只关注彩票 p 的期望 E_p 和方差 V_p, 即彩票 p 带给投资者的效用 $U(p)$ 只取决于其期望和方差.

1. 令 $U(p) = E_p - V_p/4$. 证明: 此时投资者的偏好关系不是期望效用偏好 (提示: 考虑彩票 $p_1 = (0.5 \circ \$0, 0.5 \circ \$400)$ 与彩票 $p_2 = (0.5 \circ \$0, 0.5 \circ \$200)$).
2. 令 $U(p) = E_p - (E_p)^2 - V_p$. 证明: 此时投资者的偏好关系是期望效用偏好, 即写出此时的 vNM 效用函数 $u(x)$, 其中 x 为货币数. (提示: 对任意随机变量 x, $\mathrm{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$)

将提示中的 p_1 和 p_2 代入 $U(p)$ 的表达式:

$$U(p_1) = 200 - 40000/4 = -9800, \quad U(p_2) = 100 - 10000/4 = -2400$$

故 $U(p_1) < U(p_2)$.

反设投资者的偏好关系是期望效用偏好, 并令 $u(x)$ 为其 vNM 效用函数. 则由 $U(p_1) < U(p_2)$ 可推出:

$$u(0)/2 + u(400)/2 < u(0)/2 + u(200)/2 \Longrightarrow u(400) < u(200)$$

另一方面, 将退化彩票 $(1 \circ 400)$ 代入 $U(p)$ 的计算公式可推出: $U(\delta_{400}) = 400 - 0/4 = 400$. 由 $U(\delta_{400}) = 1 \times u(400)$ 可知 $u(400) = 400$. 同理, $u(200) = 200$, 这和之前推出的 $u(400) < u(200)$ 相矛盾.

注: 课下有同学向我介绍了一种更简单的方法. 得到 $u(x) = x$ 后, 可以直接推出参与人是风险中性的, 对应的期望效用只会和 E_p 有关, 不可能和 V_p 有关. 矛盾.

给定任意彩票 (或概率分布) p, 令 $x \sim p$ 表示该彩票下最后获得的钱数. 代入表达式 $U(p)$ 可得:

$$U(p) = \mathbb{E}[x] - (\mathbb{E}[x])^2 - \mathrm{Var}\ [x] = \mathbb{E}[x] - (\mathbb{E}[x])^2 - (\mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2)$$

$$= \mathbb{E}[x] - \mathbb{E}[x^2] = \mathbb{E}[x - x^2]$$

令 $u(x) = x - x^2$, 则 $U(p)$ 为 $u(x)$ 的期望. 故决策者的偏好为期望效用偏好, 其 vNM 效用函数为 $u(x) = x - x^2$.

4. 大语言模型纠错

说明: DeepSeek 的回复如果是用于科普 vNM 公理化模型, 我认为没有太大的问题. 不过我们这门课毕竟是专业课, 层次肯定比一般的 “科普” 要高一些. 下面是我认为 DeepSeek 的一些较明显的事实性错误:

1. vNM 模型的核心内容是所谓的 vNM 定理:

   > 令 $\succeq$ 为彩票集上的偏好关系. 偏好 $\succeq$ 为期望效用偏好, 当且仅当它满足独立性和连续性.

独立性和连续性这两个条件是充分且必要的. DeepSeek 只提到了必要性 (“只有当一个决策者的偏好满足这些条件时，他的行为才可以用一个唯一的 vNM 效用函数来表示”), 没有提到充分性.

2. 独立性公理的描述有误. 独立性公理的完整描述必须引入类似 “复合彩票” 的概念: 若张三认为彩票 p 优于彩票 p', 则对任意彩票 q 和任意概率 $\alpha \in [0,1]$, 张三一定认为复合彩票 $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ 优于复合彩票 $\alpha p' \oplus (1-\alpha)q$.

   这里 DeepSeek 的描述里, 只是替换了一个具体的结果 (巴黎换成罗马). 这个要求比独立性弱一些.

3. vNM 模型 (以及 vNM 定理) 没有涉及到关于风险态度的部分.

4. DeepSeek: “只有当一个决策者的偏好满足这些条件时, 他的行为才可以用一个唯一的 vNM 效用函数来表示.”

   vNM 效用函数不是唯一的, 你可以对它进行任意正仿射变换而不改变偏好. 或者说, vNM 效用函数在正仿射变换的意义下才具有唯一性.

除了上述事实性错误外, 部分 DeepSeek 对 vNM 模型的解读存在过度引申: 我不能说这部分解读存在事实性错误, 但这种解读是不准确的、或很容易引发歧义. 例如:

- DeepSeek: “vNM 理论认为，人们的决策准则是最大化期望效用，而不是最大化期望金钱值”, “它将决策问题数学化，使得经济学家可以用数学工具来严谨地分析人们在风险下的行为”, … 诸如此类的描述易使人误以为冯 · 诺依曼是提出“期望效用最大化”这一决策规则的人.

  实际上, 一般认为法国数学家伯努利最早提出该规则, 而 vNM 模型则是为其提供了公理支撑. 没有 vNM 模型之前, 人们就已经在使用类似 “期望效用最大化” 这样的工具了.

- DeepSeek: “[vNM 理论] 区分了货币价值与主观感受”, “对于风险厌恶者来说, 输钱的痛苦（效用损失）大于赢钱的快乐”…

  我不建议使用诸如 “输钱的痛苦大于赢钱的快乐” 这种偏心理学的表述来解读期望效用和风险规避. 原因有两点: 1、DeepSeek 的这个描述实质上是在说 “边际效用递减”, 但边际效用递减这个事实和风险规避存在很大差别. 前者描述的是无风险情形下的确定性选择 (初级微观经济学就介绍过边际效用递减), 后者描述的是决策者在不确定下的选择. 虽然两者在数学形式上均表现为 $u(\cdot)$ 为凹函数, 但其经济学含义存在本质差异; 2、一般认为, 对 vNM 模型的正确理解应是, 如果决策者的偏好满足 vNM 公理体系, 那么他的行为就好像是在最大化某个效用函数的期望值. 我们无需对决策者的实际心理过程作过多解读.