

作业 1 附加题

- 附加题部分难度相对较高, 故不要求所有同学都提交, 但相信一定有聪明的学生能够完成.
- 教师会在周四的课上对此进行讲解. 届时若有同学主动上台讲解, 可获得额外加分.

1. 风险态度与资产组合

考虑如下最优资产组合问题. 投资者的初始财富为 w , 效用函数为

$$u(w) = \ln(w)$$

投资者将财富分配到两类资产上.

- 无风险资产 (如国债). 为简化计算, 其投资回报率记为零.
- 风险资产 (如股票). 假设该风险资产的回报 R 只有两个可能的结果: $R_1 > 0$ 和 $R_0 < 0$. 其中 R 取值为 R_1 的概率为 q , 取值 R_0 的概率为 $1 - q$.

风险资产的预期回报是正的: $qR_1 + (1 - q)R_0 > 0$. 令 $A \in \mathbb{R}$ 表示最优资产组合中投资于风险资产的金额.

1. 将 A 表示为 w 的函数, 并回答如下问题: 当投资者的财富增加时, 他会将更多还是更少的财富投入风险资产?
2. 另一位投资者的效用函数为 $u(x) = -e^{-x}$. 她在风险资产上的投资如何随财富变化? (提示: 使用隐函数求导法则)
3. 找出两位投资者的绝对风险规避系数 $r(x) = -u''(x)/u'(x)$. 它们如何随财富的变化而变化? 你能否依此来解释你在前两问中答案的差异?

2. 证明 vNM 定理

下面是豆包于 2026 年 3 月 27 日给出的关于 vNM 定理的证明. 它的证明思路中存在一个明显的漏洞 (gap); 请对照课程网站给出的证明, 找出这个漏洞.

豆包的回复

下面用清晰、不啰嗦、能直接考试默写的版本, 推一遍冯·诺依曼-摩根斯坦期望效用定理 (vNM 期望效用定理). 默认你知道基本符号:

- L : 彩票 (风险选项)
- p : 概率
- x, y, z : 确定性结果
- \succsim : 偏好关系 (弱偏好)

一、设定: 彩票空间

一个简单彩票写成:

$$L = (x, p; y, 1 - p)$$

含义: 以概率 p 得 x , $1 - p$ 得 y . 复合彩票可以化简为简单彩票, 所以只需要考虑简单彩票.

二、vNM 公理 (共 4 条核心)

决策者对所有彩票的偏好 \succsim 满足:

1. 完备性 (Completeness): 对任意 L_1, L_2 , 必有

$$L_1 \succsim L_2 \text{ 或 } L_2 \succsim L_1$$

2. 传递性 (Transitivity):

$$L_1 \succsim L_2; L_2 \succsim L_3 \implies L_1 \succsim L_3$$

3. 连续性 (Continuity): 若 $L_1 \succsim L_2 \succsim L_3$, 则存在 $p \in [0, 1]$ 使得 $L_2 \sim (L_1, p; L_3, 1 - p)$ (中间彩票等价于某个最好与最差的混合)

4. 独立性公理 (Independence): 对任意彩票 L_1, L_2, L_3 , 任意 $\alpha \in (0, 1)$:

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \alpha L_1 + (1 - \alpha)L_3 \succsim \alpha L_2 + (1 - \alpha)L_3$$

白话: 掺进同一个共同彩票, 不改变偏好顺序。

三、定理陈述

如果偏好 \succsim 满足上述完备、传递、连续、独立, 则存在一个效用函数 u , 使得对任意彩票 L_1, L_2 :

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow EU(L_1) \geq EU(L_2)$$

其中期望效用定义为:

$$EU(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \dots + p_n u(x_n)$$

并且, 这个 u 是在正仿射变换下唯一: $v(x) = au(x) + b$, $a > 0$ 期望效用大小顺序不变。

四、证明思路

1. 找最好与最差结果设 \bar{x} 最优, \underline{x} 最差。
2. 对任意结果 x , 定义 $u(x)$ 为等价概率由连续性, 存在唯一 $u(x) \in [0, 1]$ 使得: $x \sim (\bar{x}, u(x); \underline{x}, 1 - u(x))$ 就把这个概率直接定义为 $u(x)$ 。
3. 用独立性公理, 把任意彩票“化简”为最好 / 最差的混合对任意彩票 $L = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$, 对每个 x_i 替换成等价的 $(\bar{x}, u(x_i); \underline{x}, 1 - u(x_i))$, 用独立性反复合并, 得到: $L \sim (\bar{x}, \sum p_i u(x_i); \underline{x}, 1 - \sum p_i u(x_i))$
4. 比较等价概率即可比较彩票彩票偏好等价于其等价概率大小, 而这个概率就是: $EU(L) = \sum p_i u(x_i)$ 于是: $L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow EU(L_1) \geq EU(L_2)$

五、一句话总结

只要偏好完备、传递、连续、独立, 就一定能用一个线性于概率的效用函数表示偏好, 也就是期望效用最大化。