求解委托人最优合同 (一般情形)

- 湖南大学课程
- 信息经济学

1. 基准情形 (第一最优解)

假设不存在道德风险问题, 此时公司可以直接在合同中规定张三的努力程度 a.

- 比如, 公司可以直接在合同中规定: 如果张三的努力程度低于 a, 就不支付任何工资 (甚至倒扣工资).
- 直觉上, 公司在合同中规定了其希望的努力程度 a 后, 会选择支付某个**固定工资** $\hat{w} \in \mathbb{R}$, 而不是令工资取决于产出 q.

我们接下来证明这个直觉是对的:

1. 令 $w(q)$ 表示张三努力程度为 a 时公司支付的工资,
2. 证明最优合同中 $w(q)$ 是常函数, 即 $w(q) = \hat{w}$ 对任意产出水平 q 均成立.

2. 基准情形: 公司最优化问题

公司的目标函数:

$$\max_{a \in A, w(q)} \mathbb{E}[q - w(q) \mid a]$$

约束:

$$\mathbb{E}[u(w(q))] - c(a) \geq \underline{u} \quad \text{(IR)}$$

最优合同中, IR 约束一定是紧的.

- 否则, 公司可以适当降低工资为 $w(q) - \varepsilon$; 只要 $\varepsilon > 0$ 足够小, 就可以在满足 IR 约束的同时提高期望利润.

公司的最优化问题包含两个决策变量: a 和 $w(\cdot)$

两步法求解最优合同:

1. 固定任意努力程度 $a \in A$, 找到满足 IR 约束的最优工资方案 $w(\cdot)$.
2. 公司选择其希望的努力程度 a^*.

3. 两步法求解最优合同: Step 1

Step 1: 固定任意努力程度 a, 找到最优工资 $w(\cdot)$.

最优化问题的拉格朗日函数:

$$L(\lambda, w(\cdot)) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\, q - w(q) + \lambda(u(w(q)) - c(a) - \underline{u}) \,\Big]\, f(q \mid a)\, dq$$

其中:

- λ 是 IR 约束的拉格朗日乘子.
- IR 约束在解中总是紧的, 因此其对应的拉格朗日乘子满足 $\lambda > 0$.

根据 Kuhn-Tucker 定理, 只需考虑 $\min_{\lambda \geq 0} \max_{w(\cdot)} L(\lambda, w(\cdot))$

- 内层的最大化定积分问题 $(\max_{w(\cdot)} L(\lambda, w(\cdot)))$ 可以通过**逐点**最优化被积分项求解.

对任意 q, 公司选择某个工资水平 $\hat{w} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\max_{\hat{w}\in\mathbb{R}} \Big(-\hat{w} + \lambda u(\hat{w}) \Big)$$

该最优化问题的目标函数是凹的:

- 一阶条件 $\Longrightarrow u'(\hat{w}) = 1/\lambda$ 对所有 q 成立.

因此, 公司的最优工资方案和产出 q 无关. 对任意产出 q, 只要张三的努力水平是公司希望的 a, 公司都会支付某个固定工资水平.

- 这个结果和我们此前的直觉一致.

最优工资方案由 IR 约束决定:

$$u(w^*) - c(a) = \underline{u} \Longrightarrow w^* = u^{-1}(\underline{u} + c(a))$$

- 注: $u^{-1}(\cdot)$ 表示函数 $u(w)$ 的反函数, 不是倒数 $\frac{1}{u(w)}$.

4. 两步法求解最优合同: Step 2

Step 2: 求解公司最优努力程度 a^*.

$$\max_{a\in A} \mathbb{E}[q \mid a] - u^{-1}(\underline{u} + c(a))$$

- 该最优化问题的解决定了最优努力程度 a^*

5. 道德风险情形

假设公司不能在合同中直接监督张三的行动.

如果公司希望张三选择行动 a, 将面临额外的激励相容约束:

$$\mathbb{E}[u(w(q)) \mid a] - c(a) \geq \mathbb{E}[u(w(q)) \mid \tilde{a}] - c(\tilde{a}), \quad \forall \tilde{a} \in A$$

上述激励相容约束可以等价地描述为:

- 努力程度 a 是最优化问题 $\max_{\tilde{a}\in A} \mathbb{E}[u(w(q)) \mid \tilde{a}] - c(\tilde{a})$ 的解, 即

$$a \in \arg\max_{\tilde{a}\in A} \mathbb{E}[u(w(q)) \mid \tilde{a}] - c(\tilde{a})$$

公司最优化问题如下:

$$\max_{w(\cdot), a\in A} \mathbb{E}[q - w(q) \mid a]$$

约束条件:

$$\mathbb{E}[u(w(q)) \mid a] - c(a) \geq \underline{u} \quad \text{(IR)}$$

$$a \in \arg\max_{\tilde{a}\in A} \mathbb{E}[u(w(q)) \mid \tilde{a}] - c(\tilde{a}) \quad \text{(IC)}$$

分别求解两种不同行动集下的公司最优合同:

1. 二元行动: $A = \{L, H\}$ $(L < H)$
2. 连续行动: $A = [L, H]$ $(L < H)$

6. 单调似然比假设

为了确保高努力水平会带来更好的产出分布, 我们做出如下假设:

$$\frac{f(q \mid H)}{f(q \mid L)} \text{ 关于 } q \text{ 严格递增}$$

上述假设常被称为**单调似然比 (Monotone Likelihood Ratio, MLR)** 假设.

- 直观解释: 产出 q 较大, 张三采取高努力 $(a = H)$ 的可能性 (likelihood) 更大.

为了简化描述, 我们只对比了行动 H 和行动 L 的产出分布.

- 当存在连续行动时, 将行动 H 和 L 分别替换为较高努力水平和较低努力水平即可.

7. 二元行动情形

令 $a \in A \equiv \{L, H\}$, 且 $c(H) > c(L) = 0$.

两步法求解最优工资方案:

1. 固定任意努力程度 $a \in A$, 求解努力程度 a 下的最优工资方案 $w(q)$.
2. 求解 (公司) 最优努力程度 a^*

8. 二元行动情形: 若公司实施 $a = L$

- 如果公司希望张三采取低努力行动 L, 此时可以忽略 IC 约束, 仅支付某个和产出无关的固定工资水平即可
- IR 条件 $\Longrightarrow$ 固定工资为 $w^* = u^{-1}(\underline{u})$
- 公司的期望利润为 $\Pi = \mathbb{E}[q \mid L] - u^{-1}(\underline{u})$.

9. 二元行动情形: 若公司实施 $a = H$

公司最优化问题:

$$\max_{w(\cdot)} \mathbb{E}[q - w(q) \mid H]$$

约束条件:

$$\mathbb{E}[u(w(q)) \mid H] - c(H) \geq \underline{u}$$

$$\mathbb{E}[u(w(q)) \mid H] - c(H) \geq \mathbb{E}[u(w(q)) \mid L]$$

将 IR 和 IC 的拉格朗日乘子分别记为 λ 和 μ, 写出拉格朗日函数 $L(w(\cdot), \lambda, \mu)$.

$$\begin{aligned} L(w(\cdot), \lambda, \mu) = & \int_{\mathbb{R}} \left[\ q - w(q)\ \right] f(q \mid H)\, dq \\ & + \lambda \int_{\mathbb{R}} \left[\ u(w(q)) - c(H) - \underline{u}\ \right] f(q \mid H)\, dq \\ & + \mu \int_{\mathbb{R}} \left[\ u(w(q)) - c(H)\ \right] f(q \mid H)\, dq \\ & - \mu \int_{\mathbb{R}} u(w(q)) f(q \mid L)\, dq \end{aligned}$$

合并积分项并移出常数项 ($c(H)$, $c(L)$ 和 $\underline{u}$):

$$L=\int_{\mathbb{R}}\left[q-w(q)+\lambda u\ (\ w(q)\ )+\mu u(w(q))\left(1-\frac{f(q\mid L)}{f(q\mid H)}\right)\right]f(q\mid H)\,dq-\lambda\ (\ c(H)+\underline{u}\ )-\mu c(H)$$

引理: 最优化问题的解中, 约束 IR 和 IC 都是紧的 (即 $\lambda,\mu>0$).

证明: IR 约束一定是紧的 (证明同前), 故 $\lambda>0$.

反设 $\mu=0$, 则 (IC) 成为冗余约束, 此时最优工资为固定工资 $w(q)=w^*$. 但由于 $c(H)>0$, 固定工资方案不满足 (IC), 矛盾. QED

最大化拉格朗日函数 ⇔ 逐点最大化被积分项.

- 关于 w 的一阶条件为:

$$-1+\lambda u'(w(q))+\mu\left[u'(w(q))-u'(w(q))\frac{f(q\mid L)}{f(q\mid H)}\right]=0$$

$$\Longrightarrow\left[\lambda+\mu-\mu\frac{f(q\mid L)}{f(q\mid H)}\right]u'(w(q))=1$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{u'(w(q))}=\lambda+\mu\left[1-\frac{f(q\mid L)}{f(q\mid H)}\right]$$

由单调似然比假设可知, $w(q)$ 关于 q 递增.

- **详细说明:** 等式的右侧关于 q 递增, 因此左侧也必须关于 q 递增.
  另外, 由于 $u'(w)$ 随 w 递减, 故 $\frac{1}{u'(w)}$ 随 w 递增. 因此, $w(q)$ 必须关于 q 递增.

10. 连续行动情形

接下来讨论 A 为连续区间的情形.

固定任意工资合同 $w(\cdot)$, 令 $V(a)$ 表示张三选择行动 a 时的期望效用:

$$V(a)=\mathbb{E}[u(w(q))\mid a]-c(a)=\int_{\mathbb{R}}u(w(q))f(q\mid a)\,dq-c(a)$$

公司的最优化问题如下:

$$\begin{aligned}&\max_{a\in A,w(\cdot)}\ \mathbb{E}[q-w(q)\mid a]\\ &\text{subject to}\ \ V(a)\geq\underline{u}\quad\text{(IR)}\\ &\qquad a\in\arg\max_{\tilde{a}\in A}V(\tilde{a})\quad\text{(IC)}\end{aligned}$$

一阶方法: 用一阶条件 $V'(a)=0$ 替代 (IC):

$$V'(a)=\int_{\mathbb{R}}u(w(q))f_a(q\mid a)\,dq-c'(a)=0$$

- $f_a(q\mid a)$ 表示对 a 求偏导, 即 $\frac{\partial}{\partial a}f(q\mid a)$.

注: 一阶方法大大简化了分析, 但其严格性依赖于额外假设.

- 本讲最后讨论了一阶方法何时适用.

对应的拉格朗日函数 $L(\lambda,\mu)$ 为:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[q - w(q) + \lambda(u(w(q)) - c(a) - \underline{u}) + \mu \left(u(w(q)) \frac{f_a(q \mid a)}{f(q \mid a)} - c'(a) \right) \right] f(q \mid a)\, dq$$

逐点最大化被积分项: 固定任意 q, 关于 w 的一阶条件为

$$-1 + \lambda u'(w(q)) + \mu u'(w(q)) \frac{f_a(q \mid a)}{f(q \mid a)} = 0$$

$$\implies \frac{1}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q \mid a)}{f(q \mid a)}$$

单调似然比(MLR): 对所有 $a_H > a_L$, 似然比 $\frac{f(q|a_L)}{f(q|a_H)}$ 关于 q 严格递减.

引理: 由单调似然比假设可知, $\frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}$ 关于 q 递增.

证明: 固定任意 $a_H > a_L$.

由于 $\log \frac{f(q|a_L)}{f(q|a_H)}$ 随 q 递减 (单调似然比), 所以 $\log f(q \mid a_H) - \log f(q \mid a_L)$ 关于 q 递增.

因此,

$$\frac{f_a(q \mid a)}{f(q \mid a)} = \frac{\partial}{\partial a} \log f(q \mid a) = \lim_{h \to 0} \frac{\log f(q \mid a + h) - \log f(q \mid a)}{h}$$

关于 q 递增. QED.

进一步证明, 均衡中拉格朗日乘子 μ 一定为正.

断言: 单调似然比 $\implies \mu > 0$ (即工资关于 q 递增).

证明: 反设 $\mu = 0$, 此时工资 $w(q)$ 独立于 q.

令 $\hat{w} \in \mathbb{R}$ 为使得

$$\frac{1}{u'(\hat{w})} = \lambda$$

成立的工资方案. 则有:

$$\begin{aligned}
V'(a) &= \int_{\mathbb{R}} u(w(q)) f_a(q \mid a)\, dq - c'(a) \\
&= \int_{f_a \geq 0} u(w(q)) f_a(q \mid a)\, dq + \int_{f_a \leq 0} u(w(q)) f_a(q \mid a)\, dq - c'(a) \\
&\leq \int_{f_a \geq 0} u(\hat{w}) f_a(q \mid a)\, dq + \int_{f_a \leq 0} u(\hat{w}) f_a(q \mid a)\, dq - c'(a) \\
&= u(\hat{w}) \int_{\mathbb{R}} f_a(q \mid a)\, dq - c'(a) \\
&= u(\hat{w}) \frac{d}{da} \int_{\mathbb{R}} f(q \mid a)\, dq - c'(a) \\
&= u(\hat{w}) \cdot 0 - c'(a) = -c'(a) < 0
\end{aligned}$$

这与一阶条件要求的 $V'(a) = 0$ 矛盾. 因此 $\mu > 0$.

推论: 单调似然比 $\implies \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}$ 关于 q 递增且 $\mu > 0$
$\implies w(q)$ 关于 q 递增

11. 补充说明: 一阶方法的合理性

前面的分析中, 我们用一阶条件 $V'(a) = 0$ 替代了张三的 IC 约束.

- 但是, 仅满足一阶条件的努力选择不一定是全局最大值.
  - 对于给定的工资方案 $w(q)$, 函数 $V(a)$ 不一定是凹的.
- Mirrlees 提供了一个反例 (见 Bolton 和 Dewatripont 的教材)

如果我们进一步假设分布 $F(q \mid a)$ 关于 a 上是凸的, 一阶条件就是充分的.

凸分布函数假设: 假设 $F(q \mid a)$ 在 a 上是凸的. 则

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f(q \mid a)\, dq - c(a) \\
&= u(w(\bar{q}))\underbrace{F(\bar{q} \mid a)}_{=1} - u(w(\underline{q}))\underbrace{F(\underline{q} \mid a)}_{=0} - \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u'(w(q)) w'(q) F(q \mid a)\, dq - c(a) \\
&= u(w(\bar{q})) - \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} \underbrace{u'(w(q))}_{\geq 0} \quad \underset{\geq 0}{} \; \underbrace{w'(q)}_{\text{(单调似然比)}} \quad F(q \mid a)\, dq - c(a)
\end{aligned}
$$

- $V(a)$ 是凹的.

例:

- 假设 $A = [0, 1]$ 且 $F(q \mid a) = aF_H(q) + (1 - a)F_L(q)$,
- 其中 $F_H(q)$ 和 $F_L(q)$ 是某个累积分布函数.
- 因此, $F(q \mid a)$ 关于 a 是线性的 (因此也是凹的).
- 此时, 一阶方法可以确保张三的行动是全局最优的 (即满足激励相容约束).