

# 最优激励合同：二元情形

- 湖南大学
- 信息经济学课程

## 1. 委托代理问题

---

考虑如下委托代理情形：

- 委托人：公司
- 代理人：打工人张三
- 公司希望张三能努力干活，因为努力干活能提高项目的成功概率，进而提高公司的期望利润。
- 但是，公司不能直接监督张三是否努力干活（**道德风险**）

## 2. 激励合同

---

公司可以为项目成功提供额外的**激励**：

- 项目不成功时，支付较低工资  $w_0$
- 项目成功时，支付较高工资  $w_1 > w_0$

上面这个形式的合同也可以等价地表述为如下绩效合同的形式：

- 公司支付基本工资  $w_0$
- 如果项目成功了，公司会支付额外**绩效** (bonus)：  
$$b = w_1 - w_0$$

## 3. 无道德风险情形

---

如果**不存在道德风险**，公司支付的工资可以直接由张三的努力程度决定，而不是由项目是否成功决定。

- 此时，我们称公司可以**直接监督**张三的努力程度。这意味着：
  1. 公司可以直接观测到张三的努力程度，并且法律上允许公司将员工薪酬取决于员工的努力程度。
  2. 如果双方发生劳资纠纷，公司可以向法院证明张三确实没有努力工作。

直觉上，当不存在道德风险问题时，公司应该直接根据“张三的努力程度”来发放绩效，而不是根据“项目是否成功”来发放绩效。

- **问**：为什么从公司的角度出发，根据“努力程度”来发放绩效更为高效？（假设张三是风险厌恶的）

## 4. 模型设定

---

考虑如下关于激励合同的极简道德风险模型。该模型包括：

- 两个可能的代理人行动（“努力干活”，“消极怠工”）
- 两个可能的产出水平（“项目成功”，“项目失败”）

上述二元模型是关于激励合同最基础的模型，后续我们会讨论代理人行动非二元的情形。

张三的行动集为  $A = \{0, 1\}$ ：

- 努力工作：  $a = 1$
- 消极怠工：  $a = 0$

努力工作的会提高项目的成功率，但会给张三带来负效用。

- 张三的最终效用取决于他的工资  $w \in \mathbb{R}$  和行动  $a \in \{0, 1\}$ :

$$v(w, a) = u(w) - al = \begin{cases} u(w) - l & \text{若 } a = 1 \\ u(w) & \text{若 } a = 0 \end{cases}$$

- $u$  是严格凹的 (张三厌恶风险)
- $l > 0$  表示努力干活带给张三的负效用

项目可能成功或失败:

- 如果张三消极怠工 ( $a = 0$ ), 成功的概率为  $p_0 > 0$
- 如果张三努力工作 ( $a = 1$ ), 成功的概率为  $p_1 > p_0$

公司收益:

- 项目失败时, 公司获得利润  $\pi_0 \geq 0$
- 项目成功时, 公司获得利润  $\pi_1 > \pi_0$ ;

$2 \times 2 \times 2$  模型:

- 2 种可能行动:  $a_0, a_1$
- 2 种可能成功概率:  $p_0, p_1$
- 2 种可能项目收益:  $\pi_0, \pi_1$

## 5. 基准情形: 无道德风险时的最优合同

---

假设公司可以根据张三的行动  $a \in \{0, 1\}$  设定工资.

为了让张三能努力工作 ( $a = 1$ ), 公司应支付的最低工资  $w^*$  为:

$$u(w^*) - l = \underline{u}$$

- $\underline{u}$  为张三辞职所能取得的效用水平 (**保留效用**).
- $\underline{u}$  是外生给定的

如果公司选择雇佣张三, 此时的最优合同如下:

- 若张三努力工作, 支付工资  $w^*$ ;
- 否则, 不支付任何工资 (甚至可以对张三进行“罚款”)

## 6. 道德风险下的激励设计

---

存在道德风险时, 公司需设计绩效工资合同  $(w_1, w_0)$  来激励张三努力干活.

- $w_0$ : 项目失败时张三的工资
- $w_1$ : 项目成功时张三的工资

绩效工资合同应满足两个约束:

1. **激励相容** (Incentive Compatibility, **IC**)
2. **个体理性** (Individual Rationality, **IR**), 该约束也叫 **参与约束**

激励相容约束和个体理性约束是本讲的核心概念. 具体而言:

- 激励相容约束确保张三会努力干活, 而不是消极怠工
- 个体理性约束确保张三会接受公司合同, 而不是辞职

## 7. 激励相容约束

---

**定义 (激励相容).** 称工资合同  $(w_1, w_0)$  是**激励相容**的, 若张三选择接受合同时, 他会努力干活 ( $a = 1$ ) 而非消极怠工 ( $a = 0$ ).

- 激励相容约束的数学表示:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1) u(w_0) - l \geq p_0 u(w_1) + (1 - p_0) u(w_0)$$
$$\Leftrightarrow (p_1 - p_0) [u(w_1) - u(w_0)] \geq l$$

- 文字解释: 张三努力干活的边际收益大于边际成本.

$$(p_1 - p_0) [u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

决定张三是否干活的, 是  $\Delta u = u(w_1) - u(w_0) \approx u'(w_0)(w_1 - w_0)$ .

- 它取决于合同  $(w_1, w_0)$  本身以及张三的货币偏好  $u$ .

## 8. 个体理性约束 (or, 参与约束)

---

**个体理性约束** (也叫**参与约束**):

- 张三接受合同的效用不会低于他辞职的保留效用 ( $\underline{u}$ )

对于满足激励相容约束的合同  $(w_1, w_0)$ , 它对应的个体理性约束为:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1) u(w_0) - l \geq \underline{u}$$

- 当张三的保留效用  $\underline{u}$  变大时, 为了让张三能投入工作, 公司必须支付更高的工资.

## 9. 公司的效用函数

---

公司的目标: 最大化期望利润

$$p_1 (\pi_1 - w_1) + (1 - p_1) (\pi_0 - w_0)$$

- 隐含假设: 委托人是**风险中性的**.
- 关于“风险中性委托人”假设的常用辩护:
  1. 这个假设是符合现实的. 委托人 (如大公司、股东) 可以通过投资组合多样化来分散特定项目的风险, 对单个项目的风险可以近似视为风险中性; 但代理人通常无法分散与自身工作相关的风险 (如薪酬波动、失业风险等)
  2. 技术性解释: 如果委托人也是风险厌恶的, 那么合同设计就同时包含风险分担和激励两个目标, 问题会变得 (不必要地) 复杂; 假设委托人风险中性, 可以将分析聚焦于激励问题本身.

## 10. 公司的最优化问题

---

公司的最优化问题: 选择满足**激励相容约束**和**个体理性约束**的合同  $(w_1, w_0)$  来最大化期望利润.

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1 (\pi_1 - w_1) + (1 - p_1) (\pi_0 - w_0)$$

subject to:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1) u(w_0) - l \geq \underline{u} \quad (\text{IR})$$

$$(p_1 - p_0) [u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

- 记这个带约束的最优化问题为  $\mathcal{M}$ .