

最优激励合同：二元情形

- 湖南大学
- 信息经济学课程

委托代理问题

考虑如下委托代理情形:

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三
- 公司希望张三能努力干活, 因为努力干活能提高项目的成功概率, 进而提高公司的期望利润.
- 但是, 公司不能直接监督张三是否努力干活 (**道德风险**)

公司可以为项目成功提供额外的**激励**:

- 项目不成功时, 支付较低工资 w_0
- 项目成功时, 支付较高工资 $w_1 > w_0$

上面这个形式的合同也可以等价地表述为如下绩效合同的形式:

- 公司支付基本工资 w_0
- 如果项目成功了, 公司会支付额外**绩效** (**bonus**):

$$b = w_1 - w_0$$

如果**不存在道德风险**，公司支付的工资可以直接由张三的努力程度决定，而不是由项目是否成功决定。

- 此时，我们称公司可以**直接监督**张三的努力程度。这意味着：
 1. 公司可以直接观测到张三的努力程度，并且法律上允许公司将员工薪酬取决于员工的努力程度。
 2. 如果双方发生劳资纠纷，公司可以向法院证明张三确实没有努力工作。

无道德风险情形

如果**不存在道德风险**，公司支付的工资可以直接由张三的努力程度决定，而不是由项目是否成功决定。

- 此时，我们称公司可以**直接监督**张三的努力程度。这意味着：
 1. 公司可以直接观测到张三的努力程度，并且法律上允许公司将员工薪酬取决于员工的努力程度。
 2. 如果双方发生劳资纠纷，公司可以向法院证明张三确实没有努力工作。

直觉上，当不存在道德风险问题时，公司应该直接根据“张三的努力程度”来发放绩效，而不是根据“项目是否成功”来发放绩效。

- **问：**为什么从公司的角度出发，根据“努力程度”来发放绩效更为高效？（假设张三是风险厌恶的）

考虑如下关于激励合同的极简道德风险模型. 该模型包括:

- 两个可能的代理人行动 (“努力干活”, “消极怠工”)
- 两个可能的产出水平 (“项目成功”, “项目失败”)

上述二元模型是关于激励合同最基础的模型, 后续我们会讨论代理人行动非二元的情形.

模型设定

张三的行动集为 $A = \{0, 1\}$:

- 努力工作: $a = 1$
- 消极怠工: $a = 0$

努力工作会提高项目的成功率, 但会给张三带来负效用.

模型设定

张三的行动集为 $A = \{0, 1\}$:

- 努力工作: $a = 1$
- 消极怠工: $a = 0$

努力工作会提高项目的成功率, 但会给张三带来负效用.

- 张三的最终效用取决于他的工资 $w \in \mathbb{R}$ 和行动 $a \in \{0, 1\}$:

$$v(w, a) = u(w) - al = \begin{cases} u(w) - l & \text{若 } a = 1 \\ u(w) & \text{若 } a = 0 \end{cases}$$

模型设定

张三的行动集为 $A = \{0, 1\}$:

- 努力工作: $a = 1$
- 消极怠工: $a = 0$

努力工作会提高项目的成功率, 但会给张三带来负效用.

- 张三的最终效用取决于他的工资 $w \in \mathbb{R}$ 和行动 $a \in \{0, 1\}$:

$$v(w, a) = u(w) - al = \begin{cases} u(w) - l & \text{若 } a = 1 \\ u(w) & \text{若 } a = 0 \end{cases}$$

- u 是严格凹的 (张三厌恶风险)
- $l > 0$ 表示努力干活带给张三的负效用

项目可能成功或失败:

- 如果张三消极怠工 ($a = 0$), 成功的概率为 $p_0 > 0$
- 如果张三努力工作 ($a = 1$), 成功的概率为 $p_1 > p_0$

公司收益:

- 项目失败时, 公司获得利润 $\pi_0 \geq 0$
- 项目成功时, 公司获得利润 $\pi_1 > \pi_0$;

$2 \times 2 \times 2$ 模型:

- 2 种可能行动: a_0, a_1
- 2 种可能成功概率: p_0, p_1
- 2 种可能项目收益: π_0, π_1

基准情形：无道德风险时的最优合同

假设公司可以根据张三的行动 $a \in \{0, 1\}$ 设定工资.

为了让张三能努力工作 ($a = 1$), 公司应支付的最低工资 w^* 为:

$$u(w^*) - l = \underline{u}$$

- \underline{u} 为张三辞职所能取得的效用水平 (**保留效用**).
- \underline{u} 是外生给定的

如果公司选择雇佣张三, 此时的最优合同如下:

- 若张三努力工作, 支付工资 w^* ;
- 否则, 不支付任何工资 (甚至可以对张三进行“罚款”)

道德风险下的激励设计

存在道德风险时, 公司需设计绩效工资合同 (w_1, w_0) 来激励张三努力干活.

- w_0 : 项目失败时张三的工资
- w_1 : 项目成功时张三的工资

道德风险下的激励设计

存在道德风险时, 公司需设计绩效工资合同 (w_1, w_0) 来激励张三努力干活.

- w_0 : 项目失败时张三的工资
- w_1 : 项目成功时张三的工资

绩效工资合同应满足两个约束:

1. **激励相容** (Incentive Compatibility, **IC**)
2. **个体理性** (Individual Rationality, **IR**), 该约束也叫 **参与约束**

激励相容约束和个体理性约束是本讲的核心概念. 具体而言:

- 激励相容约束确保张三会努力干活, 而不是消极怠工
- 个体理性约束确保张三会接受公司合同, 而不是辞职

定义 (激励相容). 称工资合同 (w_1, w_0) 是**激励相容**的, 若张三选择接受合同时, 他会努力干活 ($a = 1$) 而非消极怠工 ($a = 0$).

激励相容约束

定义 (激励相容). 称工资合同 (w_1, w_0) 是**激励相容**的, 若张三选择接受合同时, 他会努力干活 ($a = 1$) 而非消极怠工 ($a = 0$).

- 激励相容约束的数学表示:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq p_0 u(w_1) + (1 - p_0)u(w_0)$$

定义 (激励相容). 称工资合同 (w_1, w_0) 是**激励相容**的, 若张三选择接受合同时, 他会努力干活 ($a = 1$) 而非消极怠工 ($a = 0$).

- 激励相容约束的数学表示:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq p_0 u(w_1) + (1 - p_0)u(w_0)$$

$$\Leftrightarrow (p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l$$

激励相容约束

定义 (激励相容). 称工资合同 (w_1, w_0) 是**激励相容**的, 若张三选择接受合同时, 他会努力干活 ($a = 1$) 而非消极怠工 ($a = 0$).

- 激励相容约束的数学表示:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq p_0 u(w_1) + (1 - p_0)u(w_0)$$
$$\Leftrightarrow (p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l$$

- 文字解释: 张三努力干活的边际收益大于边际成本.

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

决定张三是否干活的, 是 $\Delta u = u(w_1) - u(w_0) \approx u'(w_0)(w_1 - w_0)$.

- 它取决于合同 (w_1, w_0) 本身以及张三的货币偏好 u .

个体理性约束 (or, 参与约束)

个体理性约束 (也叫参与约束):

- 张三接受合同的效用不会低于他辞职的保留效用 (\underline{u})

个体理性约束 (or, 参与约束)

个体理性约束 (也叫参与约束):

- 张三接受合同的效用不会低于他辞职的保留效用 (\underline{u})

对于满足激励相容约束的合同 (w_1, w_0) , 它对应的个体理性约束为:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1) u(w_0) - l \geq \underline{u}$$

- 当张三的保留效用 \underline{u} 变大时, 为了让张三能投入工作, 公司必须支付更高的工资.

公司的效用函数

公司的目标: 最大化期望利润

$$p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0)$$

- 隐含假设: 委托人是**风险中性的**.

公司的目标: 最大化期望利润

$$p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0)$$

- 隐含假设: 委托人是**风险中性**的.
- 关于“风险中性委托人”假设的常用辩护:
 1. 这个假设是符合现实的. 委托人 (如大公司、股东) 可以通过投资组合多样化来分散特定项目的风险, 对单个项目的风险可以近似视为风险中性; 但代理人通常无法分散与自身工作相关的风险 (如薪酬波动、失业风险等)
 2. 技术性解释: 如果委托人也是风险厌恶的, 那么合同设计就同时包含风险分担和激励两个目标, 问题会变得 (不必要地) 复杂; 假设委托人风险中性, 可以将分析聚焦于激励问题本身.

公司的最优化问题

公司的最优化问题: 选择满足**激励相容约束**和**个体理性约束**的合同 (w_1, w_0) 来最大化期望利润.

公司的最优化问题

公司的最优化问题: 选择满足**激励相容约束**和**个体理性约束**的合同 (w_1, w_0) 来最大化期望利润.

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0)$$

subject to:

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq \underline{u} \quad (\text{IR})$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

- 记这个带约束的最优化问题为 \mathcal{M} .