机制设计简介

- 信息经济学
- 湖南大学课程

从筛选到机制设计

筛选模型的设定如下:

1. 卖家为每个类型 θ 的消费者定制销售方案: $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$
2. 每个消费者选择某个特定的商品 $q(\theta)$ 并支付价格 $p(\theta)$.

从筛选到机制设计

筛选模型的设定如下:

1. 卖家为每个类型 θ 的消费者定制销售方案: $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$
2. 每个消费者选择某个特定的商品 $q(\theta)$ 并支付价格 $p(\theta)$.

上述模型设定等价于如下博弈流程:

1. 卖方事先承诺**分配方案** $q(\theta)$ 和**支付方案** $p(\theta)$
2. 每个消费者报告自己的类型 θ, 并根据卖方事先的承诺获得商品 $q(\theta)$、支付价格 $p(\theta)$

从筛选到机制设计

筛选模型的设定如下:

1. 卖家为每个类型 θ 的消费者定制销售方案: $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$
2. 每个消费者选择某个特定的商品 $q(\theta)$ 并支付价格 $p(\theta)$.

上述模型设定等价于如下博弈流程:

1. 卖方事先承诺**分配方案** $q(\theta)$ 和**支付方案** $p(\theta)$
2. 每个消费者报告自己的类型 θ, 并根据卖方事先的承诺获得商品 $q(\theta)$、支付价格 $p(\theta)$

如果卖方承诺的 $\{p(\theta), q(\theta)\}$ 满足激励相容约束, 每个类型的消费者都会**如实报告**自己的类型.

- 我们接下来使用机制设计里的常用技巧来求解连续类型下的筛选模型.

连续类型

- 消费者的可能类型 θ 构成区间 $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
  - θ 的概率密度函数为 $f(\theta)$. 假设概率密度始终为正: $f(\theta) > 0, \forall\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

连续类型

- 消费者的可能类型 θ 构成区间 $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
  - θ 的概率密度函数为 $f(\theta)$. 假设概率密度始终为正: $f(\theta) > 0, \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- 卖家选择一对函数: $q : \Theta \to \mathbb{R}$ 和 $p : \Theta \to \mathbb{R}$
  - $(q(\theta), p(\theta))$ 需满足激励相容约束和个体理性约束.
  - 均衡中, 每个类型 $\tilde{\theta} \in \Theta$ 的消费者都会 “实话实说”, 即选择对应的合同 $(q(\tilde{\theta}), p(\tilde{\theta}))$

卖家最优化问题

卖方选择 $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$ 来最大化其总利润:

$$\int_{\Theta} \Big(p(\theta) - c(q(\theta)) \Big) f(\theta) d\theta$$

约束条件:

$$\begin{aligned} \forall \theta, \hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad & \theta q(\theta) - p(\theta) \geq \theta q(\hat{\theta}) - p(\hat{\theta}) & (\mathrm{IC}_{\theta,\hat{\theta}}) \\ \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad & \theta q(\theta) - p(\theta) \geq 0 & (\mathrm{IR}_{\theta}) \end{aligned}$$

卖家最优化问题

当消费者类型构成连续区间时, 卖家的最优化问题属于典型的无穷维最优化问题.

- 控制变量为两个函数: $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$.

这类带有不等式约束的无穷维问题一般难以求解.

不过, 机制设计领域的研究者已为这类问题提供了一套通用的求解算法, 下面我们将对此进行介绍.

虚拟价值

定义**虚拟价值** (virtual value) 函数:

$$\varphi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$$

关键假设: 虚拟价值函数 $\varphi(\theta)$ 是严格递增的

虚拟价值

定义**虚拟价值** (virtual value) 函数:

$$\varphi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$$

关键假设: 虚拟价值函数 $\varphi(\theta)$ 是严格递增的

- 这个假设本质上是对密度函数 $f(\theta)$ 的假设.
- 若虚拟价值 $\varphi(\theta)$ 是递增的, 称此时的密度函数 $f(\theta)$ 是**正则的** (regular).

请验证: 若 $f(\theta)$ 是递增的, 则 $f(\theta)$ 一定是正则的.

理解虚拟价值

筛选问题中, 为了让每个消费者如实报告自己的类型, 卖家必须给 “高类型” 消费者提供 **信息租.**

- 虚拟价值函数 $\varphi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ 中, 负项 $-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ 表示卖家的让利

密度函数 $f(\theta)$ 是正则的 $\Leftrightarrow$ 类型 θ 更高的消费者具有更高的虚拟价值

理解虚拟价值

筛选问题中, 为了让每个消费者如实报告自己的类型, 卖家必须给 "高类型" 消费者提供**信息租.**

- 虚拟价值函数 $\varphi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ 中, 负项 $-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ 表示卖家的让利

密度函数 $f(\theta)$ 是正则的 $\Leftrightarrow$ 类型 θ 更高的消费者具有更高的虚拟价值

引理. 均衡中, 卖家只服务虚拟价值为正的消费者.

- 由于 $f(\theta)$ 是正则的, 该命题意味着卖家只会服务类型足够高的消费者

卖家最优化问题的解

- 令 θ^* 为满足 $\varphi(\theta) \geq 0$ 的最小 θ.
- 对任意 $\theta \geq \theta^*$, 令 $q(\theta)$ 为方程 $\varphi(\theta) = c'(q)$ 的解.
  - 请验证, $q(\theta)$ 是递增的.

卖家最优化问题的解

- 令 θ^* 为满足 $\varphi(\theta) \geq 0$ 的最小 θ.
- 对任意 $\theta \geq \theta^*$, 令 $q(\theta)$ 为方程 $\varphi(\theta) = c'(q)$ 的解.
  - 请验证, $q(\theta)$ 是递增的.

命题. 卖家最优化问题的解 $(q^*(\theta), p^*(\theta))$ 如下:

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \theta^* \\ q(\theta), & \theta \geq \theta^* \end{cases}$$

$$p^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q^*(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}$$

练习: 计算卖家最优销售机制

令 $C(q) = q^2/2$. 假设类型 θ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 此时密度函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ 若 } & \theta \in [0,1] \\ 0, \text{ 若 } & \theta \notin [0,1] \end{cases}$$

1. 验证 $f(\theta)$ 是正则的.
2. 计算卖家最优化问题的解 $(q^*(\theta), p^*(\theta))$.

非正则分布和随机机制

前述分析中, 我们始终默认卖家使用的销售方案 (或**机制**) 是**非随机**的.

- 非随机意味着, 当消费者报告自己的类型 θ 后, 对应的分配 $q(\theta)$ 和支付 $p(\theta)$ 都是确定的、不是概率分布.

非正则分布和随机机制

前述分析中, 我们始终默认卖家使用的销售方案 (或**机制**) 是**非随机**的.

- 非随机意味着, 当消费者报告自己的类型 θ 后, 对应的分配 $q(\theta)$ 和支付 $p(\theta)$ 都是确定的、不是概率分布.

理论上, 卖家的销售机制可以是随机的; 现实中也确实有卖家使用包含随机性的销售机制. 比如:

- **卖盲盒**
- **抽签配给** (支付价格后参与抽签: 抽中后获得商品, 没抽中部分退款或全额退款)
- 酒店、航空公司提供**包含随机性的服务.** 比如, 旅客可以在五月中旬入住, 但具体哪一天入住要等到五月初才告知; 旅客购买了五月中旬从长沙到北京的机票, 但具体出发时间要等到五月初才告知.

命题. 假设卖家可以使用随机销售机制: 即消费者报告类型 θ 后, 对应的分配方案或支付方案可以是随机的.

1. 若密度函数 $f(\theta)$ 是正则的, 则卖家最优销售机制是非随机的 (具体求解方法前文已介绍).
2. 若密度函数 $f(\theta)$ 不是正则的, 则卖家最优销售机制是**随机的**.
   - 此时可以用**熨平法**求解卖家最优机制.

非正则分布和随机机制

命题. 假设卖家可以使用随机销售机制: 即消费者报告类型 θ 后, 对应的分配方案或支付方案可以是随机的.

1. 若密度函数 $f(\theta)$ 是正则的, 则卖家最优销售机制是非随机的 (具体求解方法前文已介绍).
2. 若密度函数 $f(\theta)$ 不是正则的, 则卖家最优销售机制是**随机的**.
   - 此时可以用**熨平法**求解卖家最优机制.

接下来我们用一个简单的单商品垄断问题分析, 来说明随机机制的优越性.

- 这个例子甚至没有涉及产品差异化, 它和初级微观经济学中的垄断模型设定很类似, 唯一的变化是加入了卖家产能约束.

模型设定

参与人:

- (小猪佩奇) 手办卖家
- A 市和 B 市的幼儿园小朋友

模型设定

参与人:

- (小猪佩奇) 手办卖家
- A 市和 B 市的幼儿园小朋友

卖方偏好:

- 卖家的手办库存为 $Q = 20$ 万件, 其目标是最大化这批手办的总销售收入.

消费者偏好:

- 每个消费者 (幼儿园小朋友) 至多购买一个手办.
- 消费者 i 对手办的估值为 v_i:
  - 若其以价格 p 获得商品, 其最终效用为 $v_i - p$;
  - 每个消费者的外部效用均为 0

需求设定

- A 市: 包含 20 万潜在消费者. 每个 A 市消费者估值 v_A 独立且服从区间 $[60, 100]$ 上的均匀分布.
  - 对应的需求函数为:

$$p_A(q) = 100 - 2q, \quad q \in [0, 20]$$

- B 市: 包含 80 万潜在消费者. B 市经济不发达, 消费者估值 v_B 独立且服从区间 $[20, 60]$ 上的均匀分布.

需求设定

- A 市: 包含 20 万潜在消费者. 每个 A 市消费者估值 v_A 独立且服从区间 $[60, 100]$ 上的均匀分布.
  - 对应的需求函数为:

$$p_A(q) = 100 - 2q, \quad q \in [0, 20]$$

- B 市: 包含 80 万潜在消费者. B 市经济不发达, 消费者估值 v_B 独立且服从区间 $[20, 60]$ 上的均匀分布.

总市场需求: 将 A、B 两市的需求水平加总, 加总后的估值在 $[20, 100]$ 间非均匀分布, 并且密度函数在 $v = 60$ 处存在跳跃.

- 加总后的总需求函数在 $q = 20$ 处 (对应 $p = 60$) 出现拐点:

$$p(q) = \begin{cases} 100 - 2q, \text{if} & q \in [0, 20] \\ 70 - \frac{q}{2}, \quad \text{if} & q \in [20, 100] \end{cases}$$

需求设定

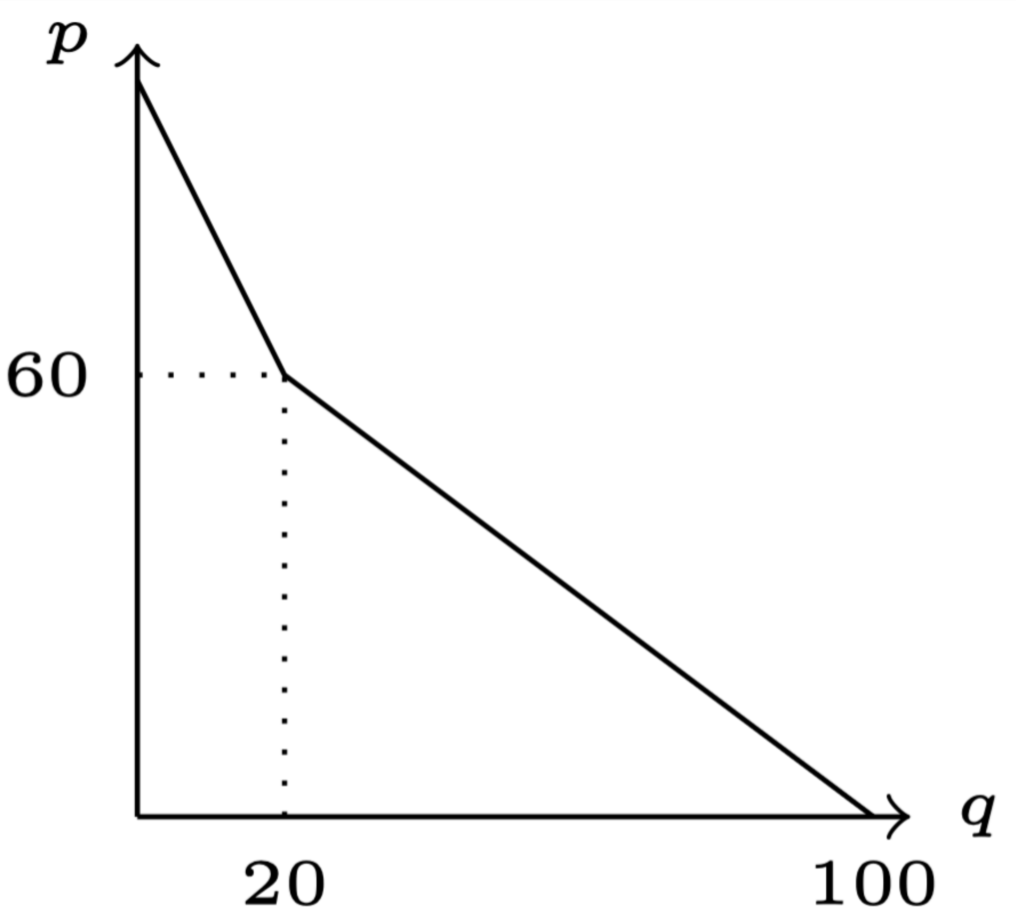

Figure 1: 加总后的总需求函数

最优确定性机制

假设卖家不能一人一价: A 市和 B 市消费者面临的选择集必须相同.

在确定性机制下, 卖家只能通过设置单一价格来分配这 20 万件库存.

- 注意到: (1) B 市消费者的最高估值仅为 60, 而 A 市消费者的最低估值也是 60; (2) A 市潜在消费者数量为 20 万
- 在只有 20 万件存货的前提下, 卖家会完全放弃 B 市 (低端消费者), 只服务 A 市 (高端消费者)

最优确定性机制

卖家最优化问题:

$$\max_{q\in[0,20]} p_A(q)q = (100-2q)q$$

上述最优化问题的解为角点解: 卖家选择 $p = 60$ 元, 并且 A 市的 20 万名小朋友刚好全部购买.

- 总收入: $20 \times 60 = 1200$ 万元. 这是确定性机制下的卖家最高收入.

这个结果看起来很符合直觉: B 市消费者的消费能力太低; 在存在产能约束限制时, 理性的卖家会放弃 B 市、只服务 A 市消费者.

随机销售机制

卖家同时推出如下两种销售方案, 供消费者自选:

a) 确定性销售方案: 支付 65 元, 直接获得手办.
   - 供应 15 万件.

b) 随机性销售方案: 支付 $55/3$ 元, 有 $1/3$ 的概率获得手办 (盲盒式销售)
   - 供应 15 万份. 由于中签率是 $1/3$, 实际消耗库存 5 万件. 没有超出库存限制.

随机销售机制

卖家同时推出如下两种销售方案, 供消费者自选:

a) 确定性销售方案: 支付 65 元, 直接获得手办.
   - 供应 15 万件.

b) 随机性销售方案: 支付 $55/3$ 元, 有 $1/3$ 的概率获得手办 (盲盒式销售)
   - 供应 15 万份. 由于中签率是 $1/3$, 实际消耗库存 5 万件. 没有超出库存限制.

问: 哪些消费者会选择确定性方案 a, 哪些会选择盲盒方案 b?

随机销售机制的激励相容性

验证激励相容性. 该销售机制恰好将高端消费者 (估值区间为 $[70, 100]$) 和中端消费者 (估值区间为 $[55, 70]$) 区分开来, 成功实现了市场细分:

- 高估值消费者 ($v \in [70, 100]$):
  - 购买方案 a 的效用: $v - 65$
  - 购买方案 b 的效用: $\frac{1}{3}(v - 55) = \frac{1}{3}v - \frac{55}{3}$
  - 由于当 $v \geq 70$ 时, $v - 65 \geq \frac{1}{3}v - \frac{55}{3}$, 因此高估值人群 (共 15 万人, 全在 A 市) 会选择方案 a.
- 中估值消费者 ($v \in [55, 70]$):
  - 由于当 $v < 70$ 时, $\frac{1}{3}(v - 55) > v - 65$, 他们更倾向于拼运气.
  - 这部分人群包括 A 市剩余的 5 万人(估值在 $[60, 70]$)以及 B 市的 10 万人(估值在 $[55, 60]$), 总计 15 万人. 他们会自愿选择参与抽签(买盲盒).

随机销售方案的优越性

此时卖家的总收入为: $65 \times 15 + 55/3 \times 15 = 975 + 275 = 1250$ 万元

- 相比确定性定价的 1200 万元, 收入增加了 50 万元.

思考: 为何随机销售方案下卖家收入上升? 这些额外获得的剩余来自哪些消费者?

随机销售方案的优越性

可以从以下两个角度来直观理解随机机制的优越性:

视角一: 价格歧视与信息租金榨取

- 单一定价下 ($p = 60$), 估值很高的消费者 (如 $v > 90$) 获得了大量的消费者剩余 (or, 信息租).
- 引入随机机制后, 卖家成功对高估值群体提价 (从 60 提到 65), 额外获取了这部分消费者的剩余.

随机销售方案的优越性

视角二: 通过盲盒销售维持高估值消费者的激励相容约束

- 手办提价到 65 元后, 多余的库存如何出售?
  - 如果要吸引更多消费者购买, 必须降价; 但降价会减少卖家从高估值消费者身上获得的剩余
- 盲盒销售对卖家有两点好处:
  1. A 市的高估值消费者 ($[70, 100]$ 区间) 为了确保拿到手办, 不得不接受 65 元的高价;
  2. 卖家成功将多余的库存卖给了 A 市和 B 市那些 “愿意出 55/3 元碰运气” 的中端消费者.

随机机制与虚拟价值的非单调性

从数学的角度来看, 随机机制的优越性源于此时虚拟价值的非单调性

- 总需求函数在 $q = 20$ 处存在拐点, 该处的虚拟价值是非单调的、存在不连续跳跃.

机制设计理论证明了, 当虚拟价值非单调时, 最优机制必然包含随机分配 (即对虚拟价值的非单调处进行 “熨平”)

本例中的随机机制, 除了可以通过盲盒销售 (即支付 $55/3$ 元买一张彩票) 实现外, 还可以通过如下 “抽签配给” 的方式实现:

1. 消费者支付 55 元进行抽签, 有 $1/3$ 概率获得手办
2. 若抽中, 则获得手办; 若未抽中, 55 元全额退还.

推荐阅读: https://hlei.bayesgame.org/post/sell-lottery