期望效用：货币偏好和风险规避

信息经济学
湖南大学课程

货币偏好

前面的课程讨论了张三对于定义在确定性结果 X 上的彩票的偏好.

- 这里的集合 X 是一个很抽象的集合, 它可以包括任何形式的奖励或惩罚
- 比如, 结果可以是奖励一杯奶茶, 一个 iPhone, 一万人民币或《信息经济学》课程加分

本讲我们讨论非常具体的集合: $X = \mathbb{R}$

- X 中的元素为货币或财富.

一般用小写字母 u 表示张三的效用函数, 大写字母 U 表示期望效用.

单调性、风险与效用函数

已知 $X=\mathbb{R}$, 我们可以对效用函数 $u(x)$ 施加更多（合理的）限制.

- 比如, 可以要求 $u(x)$ 是严格递增的:
  - 若 $x>y$, 则 $u(x)>u(y)$.
  - 单调性是很合理的假设: 张三希望钱越多越好.
- 由于我们讨论的是不确定性下的偏好, 张三对于风险的态度 (风险厌恶或风险喜爱) 也会对效用函数的形式施加进一步的限制

本讲的目的: 分析效用函数 $u(x)$ 如何反映张三的风险态度

风险规避

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

风险规避

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的 “风险” 更小.

风险规避

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的 "风险" 更小.

问: 我们目前为止关于彩票偏好关系的假设 (vNM 三公理和严格单调假设), 可以推导出这种风险规避行为么?

风险规避

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的 “风险” 更小.

问: 我们目前为止关于彩票偏好关系的假设 (vNM 三公理和严格单调假设), 可以推导出这种风险规避行为么?

- 不能. 期望效用模型本身不蕴含 “风险规避” 的性质.

如果我们进一步假设张三的 vNM 效用函数是**凹的**, 张三的行为就满足风险规避.

风险和效用函数的凹凸性

例: $u(x) = \sqrt{x}$, 其中 x 为最终收入.

1. 彩票一: 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
   期望效用 $= 0.5 \times \sqrt{10} + 0.5 \times 0 = \sqrt{2.5}$.
2. 彩票二: 一定赢 5 万
   期望效用 $= \sqrt{5} > \sqrt{2.5}$.

   - 张三会选择彩票二 (一定获得 5 万).

风险和效用函数的凹凸性

例: $u(x)=\sqrt{x}$, 其中 x 为最终收入.

1. 彩票一: 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
   期望效用 $=0.5\times\sqrt{10}+0.5\times 0=\sqrt{2.5}$.
2. 彩票二: 一定赢 5 万
   期望效用 $=\sqrt{5}>\sqrt{2.5}$.
   - 张三会选择彩票二 (一定获得 5 万).

- 给定 $u(x)=\sqrt{x}$, 张三对于彩票一和"一定获得 2.5 万" 是无差异的.
- 称 2.5 万是彩票一的**确定性等价**

Jensen 不等式 (也叫凹函数不等式):

- 若函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是严格凹的, 则对任意 $x_1\neq x_2$ 和实数 $\alpha\in(0,1)$, 下列不等式成立:

$$u(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>\alpha u(x_1)+(1-\alpha)u(x_2).$$

请结合 $u(x)=\sqrt{x}$ 的函数图像, 画图理解该不等式.

Jensen 不等式: 一般情形

Jensen 不等式可以很自然地推广到任意序列 $\{x_i\}$ 和概率权重 $\{\alpha_i\}$ 的情形:

$$u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) > \sum_i \alpha_i u(x_i), \text{ 对任意 } \sum_i \alpha_i = 1$$

- 如果函数 u 是严格凸的, 则反方向的不等式成立 (**凸函数不等式**).
- 如果 u 是线性的, 则 $u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i u(x_i)$.

Jensen 不等式: 一般情形

Jensen 不等式可以很自然地推广到任意序列 $\{x_i\}$ 和概率权重 $\{\alpha_i\}$ 的情形:

$$u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) > \sum_i \alpha_i u(x_i), \text{ 对任意 } \sum_i \alpha_i = 1$$

- 如果函数 u 是严格凸的, 则反方向的不等式成立 (**凸函数不等式**).
- 如果 u 是线性的, 则 $u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i u(x_i)$.

u 是线性的 $\Leftrightarrow$ 张三是**风险中性**的

风险态度

定义. 彩票 p 的**确定性等价** (certainty equivalent) 为满足下列方程的实数 $x_p \in \mathbb{R}$:

$$u(x_p) = \Sigma_{x \in X} p(x) u(x)$$

- 注: 根据定义, 张三对于彩票 p 和退化彩票 **"一定获得 x_p 元"** 是无差异的: $p \sim (1 \circ x_p)$.

风险态度

风险态度

定义. 彩票 p 的**确定性等价** (certainty equivalent) 为满足下列方程的实数 $x_p \in \mathbb{R}$:

$$u(x_p) = \Sigma_{x \in X} p(x) u(x)$$

- 注: 根据定义, 张三对于彩票 p 和退化彩票 **"一定获得 x_p 元"** 是无差异的: $p \sim (1 \circ x_p)$.

记 $E[p] = \sum_{x \in X} p(x) x$ 为彩票 p 的期望.

定义 (风险态度).

- 若 $x_p < E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是**风险厌恶**的 (risk-averse)
- 若 $x_p = E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是**风险中性**的 (risk-neutral)
- 若 $x_p > E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是**风险喜爱**的 (rish-loving)

由 Jensen 不等式可知:

风险态度

- 风险规避 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是严格凹的 $(u''(x) < 0)$.
- 风险中性 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是线性的 $(u''(x) = 0)$.
- 喜爱风险 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是严格凸的 $(u''(x) > 0)$.

衡量风险规避的程度

几乎所有经济学研究中, 都假设参与人是风险厌恶或风险中性的.

在保险经济学和金融学等领域, 一般假设参与人是风险厌恶的, 并且会用不同的方式来量化参与人风险厌恶的程度.

我们介绍两个衡量风险厌恶的指标:

- 绝对风险规避
- 相对风险规避

绝对风险规避: 引例

问: 除了风险态度外, 现实中不确定下的决策还和哪些因素有关?

绝对风险规避: 引例

问: 除了风险态度外, 现实中不确定下的决策还和哪些因素有关?

考虑如下两张彩票:

- 彩票 a: 一定获得 **1 万元**
- 彩票 b: 1% 可能获 **100 万元**, 99% 可能获 **0.1 万元**.

绝对风险规避: 引例

问: 除了风险态度外, 现实中不确定下的决策还和哪些因素有关?

考虑如下两张彩票:

- 彩票 a: 一定获得 **1 万元**
- 彩票 b: 1% 可能获 **100 万元**, 99% 可能获 **0.1 万元**.

问: 总资产为 1 万的张三会偏好哪个彩票? 总资产为 100 万的李四会偏好哪个彩票?

- 决策者的选择会如何取决于其已有财富 w?

绝对风险规避: 定义

张三拥有财富 $w \in \mathbb{R}$, 他面临两个选择:

1. 确定获得 z 元
2. 彩票 $p(x)$, 结果集为 $X \subset \mathbb{R}$

绝对风险规避: 定义

张三拥有财富 $w \in \mathbb{R}$, 他面临两个选择:

1. 确定获得 z 元
2. 彩票 $p(x)$, 结果集为 $X \subset \mathbb{R}$

定义. 如果张三接受彩票 p 的意愿随着财富 w 的增加而增加, 我们称他的**绝对风险规避** (ARA, Absolute Risk Aversion) 程度是随财富递减的.

绝对风险规避: 直观解释

现实中, 富人往往比穷人更勇于承担风险:

- 这个现象说明, 大多数人的绝对风险规避程度是 (关于财富) 递减的 (decreasing ARA).

绝对风险规避: 直观解释

现实中, 富人往往比穷人更勇于承担风险:

- 这个现象说明, 大多数人的绝对风险规避程度是 (关于财富) 递减的 (decreasing ARA).

若张三具有递减的绝对风险规避系数, 并且他愿意在财富为 w_1 时选择彩票 p 而不是确定性回报 z, 那么:

- 当张三的财富上升时, 他仍会选择彩票 p.
- 当张三的财富减少时, 他的选择可能变为确定性回报 z.
- 上述过程中, 张三的风险偏好 (即效用函数 $u(w)$) 没有变, 只是财富变了.

绝对风险规避系数

$$A_u(w) = -u''(w)/u'(w)$$

- 不引起混淆时, 我们也可以省略下标 u, 直接写成 $A(w)$.

绝对风险规避系数

$$A_u(w) = -u''(w)/u'(w)$$

- 不引起混淆时, 我们也可以省略下角标 u, 直接写成 $A(w)$.

如果 $A(w)$ 是递减的, 则说明张三具有递减的绝对风险规避系数.

- 类似可定义恒定的或递增的绝对风险规避系数.

绝对风险规避系数: 例

计算绝对风险规避系数:

- $u(x) = e^{-\alpha x}$

绝对风险规避系数: 例

计算绝对风险规避系数:

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).

绝对风险规避系数: 例

计算绝对风险规避系数:

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).
- $u(x) = \sqrt{x}$

绝对风险规避系数: 例

计算绝对风险规避系数:

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).
- $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2x}$ (递减绝对风险规避).

绝对风险规避系数: 例

计算绝对风险规避系数:

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).
- $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2x}$ (递减绝对风险规避).

练习: 记张三和李四的效用函数分别为 $u(x)$ 和 $v(x)$. 若存在递增的严格凹函数 g 使得 $v(x) = g(u(x))$, 则称李四比张三**更厌恶风险**.

证明: 此时李四的绝对风险规避高于张三: $A_v(x) > A_u(x)$.

从绝对风险到相对风险

如果张三是一个投资者, 前面的分析中, 我们分析的是张三投资时的**绝对回报**.

- 下面我们用**回报率**, 而非绝对回报, 来分析张三的决策.

相对风险规避

张三的财富为 w, 他面临两个选择:

- 投资国债, 其回报率为确定的 $z > 0$
- 投资股票, 其回报率 r 服从分布 p

张三考虑将财富投资于其中一种资产:

- 如果他将所有财富投资于安全资产(国债), 他的效用为 $u(w(1+z))$
- 如果他将所有财富投资于风险资产(股票), 他的期望效用为 $\Sigma_r p(r) u(w(1+r))$
- **问:** 张三的选择如何取决于他的财富 w?

相对风险规避

张三的财富为 w, 他面临两个选择:

- 投资国债, 其回报率为确定的 $z > 0$
- 投资股票, 其回报率 r 服从分布 p

张三考虑将财富投资于其中一种资产:

- 如果他将所有财富投资于安全资产(国债), 他的效用为 $u(w(1+z))$
- 如果他将所有财富投资于风险资产(股票), 他的期望效用为 $\Sigma_r p(r) u(w(1+r))$
- **问:** 张三的选择如何取决于他的财富 w?

定义. 若张三投资于风险资产的意愿随着财富的增加而增加, 则称他的行为满足**相对风险规避** (RRA, relative risk aversion) 递减.

相对风险规避系数: 递减、恒定和递增情形

如果张三的行为满足相对风险规避递减, 并且他在财富为 w_1 时选择投资风险资产:

- 那么, 当他的财富上升为 $w_2 > w_1$ 时, 他一定仍投资于风险资产.

类似地, 可以定义递增 RRA 和恒定 RRA.

相对风险规避系数: 定义和例子

相对风险规避系数:

$$R_u(x) = -xu''(x)/u'(x)$$

- 如果 $R(x)$ 是递减的, 则称张三具有递减的相对风险规避系数.

例子:

- $u(x) = x^{1-\alpha} \Rightarrow R(x) = \alpha$ (恒定相对风险规避, CRRA).
- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow R(x) = \alpha x$