不确定情形下的决策问题：期望效用简介

信息经济学
湖南大学课程

预备知识

在讨论期望效用之前, 教师默认学生熟悉以下知识:

- 概率论的基础知识
  - 尤其是离散型概率分布以及离散型随机变量的期望
- 确定情形下偏好理论的基础知识

不确定情形下的决策

- 分析张三在**不确定情形**下的决策问题
  - 张三决策的结果具有随机性，而非完全确定的

不确定情形下的决策

- 分析张三在**不确定情形**下的决策问题
  - 张三决策的结果具有随机性, 而非完全确定的
- 例子:
  - 投资者张三决定是否要购买英伟达股票: 投资回报不确定
  - 学生张三决定是否要努力学习信息经济学: 努力学习的回报不确定, 并且会挤出其它课程的学习或休息时间
  - 政策制定者张三决定是否要推行一项新的减税方案, 该方案的实际成效是不确定的

不确定情形下的决策

- 分析张三在**不确定情形**下的决策问题
  - 张三决策的结果具有随机性，而非完全确定的
- 例子:
  - 投资者张三决定是否要购买英伟达股票: 投资回报不确定
  - 学生张三决定是否要努力学习信息经济学: 努力学习的回报不确定，并且会挤出其它课程的学习或休息时间
  - 政策制定者张三决定是否要推行一项新的减税方案，该方案的实际成效是不确定的
- 我们需要一个模型来描述不确定下的选择
  - 主流理论: **期望效用模型**

市场中的不确定性

实例: 2022 年 2 月, 俄乌战争爆发

- **问:** 你能预测这个事件对全球股市的影响么?

市场中的不确定性

实例: 2022 年 2 月, 俄乌战争爆发

- **问:** 你能预测这个事件对全球股市的影响么?
- **答:** 市场的真实反应: 当天全球股市开盘跌 3.5%, 收盘时却涨 0.4%

市场中的不确定性

实例: 2022 年 2 月, 俄乌战争爆发

- **问:** 你能预测这个事件对全球股市的影响么?
- **答:** 市场的真实反应: 当天全球股市开盘跌 3.5%, 收盘时却涨 0.4%

如何描述这种不确定性? 使用**概率工具**

方法一: 直接将不确定性表示为所有可能结果的概率分布

- 经济学中一般称这种概率分布为**彩票** (lottery)

彩票的表示

下面是一个用概率分布来表示彩票的例子

彩票 a 有三种可能结果:

- 依概率 0.5 获得一杯 “茶颜悦色”
- 依概率 0.01 获得 “iPhone”
- 依概率 0.49 “无奖励”

彩票 b 有一种可能结果:

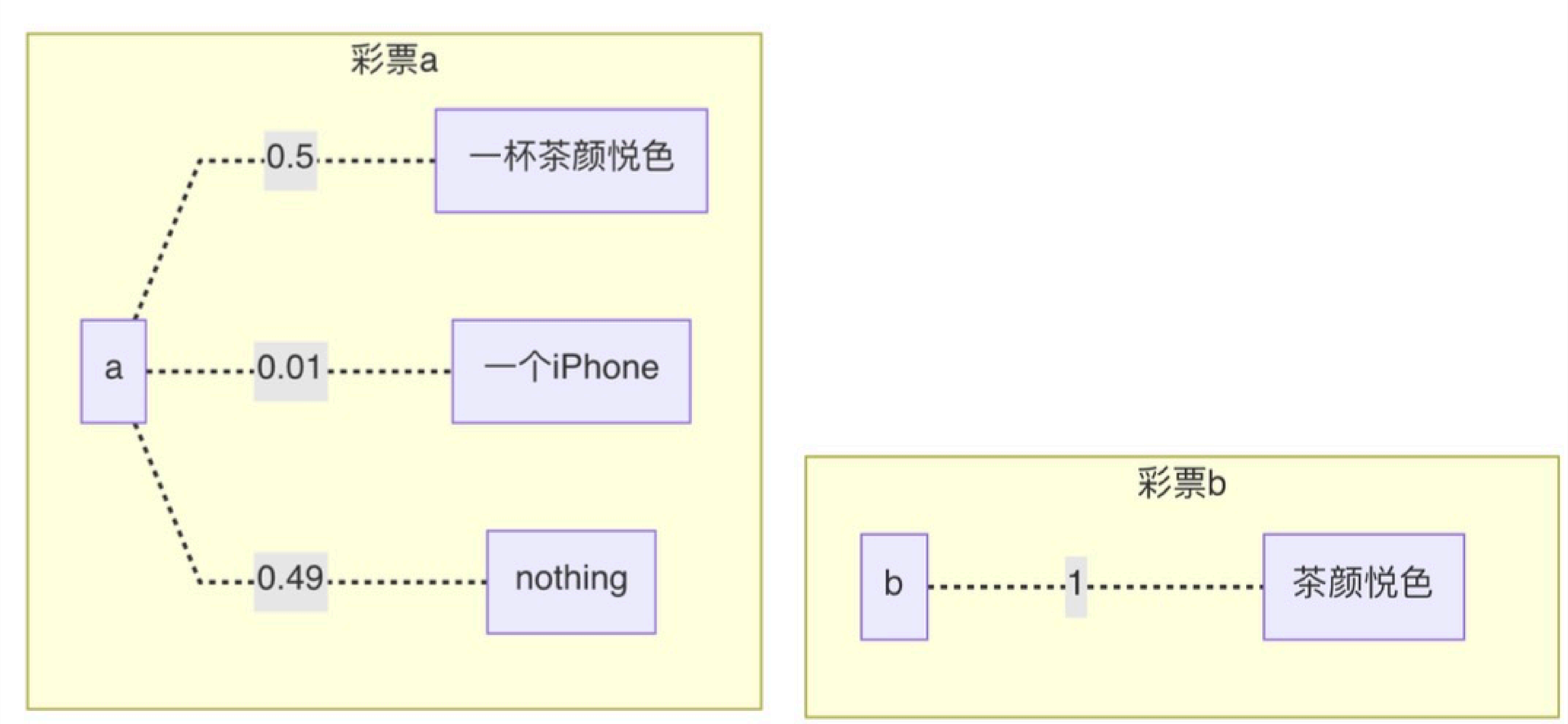
- 一定获得一杯 “茶颜悦色”

问: 你更偏好彩票 a 还是彩票 b?

树形图

树形图可以直观表示彩票:

树形图



彩票的表示: 紧凑型

最后介绍一种紧凑的表示彩票的记号:

- 彩票 $a = (0.5 \circ \text{茶颜悦色}, 0.01 \circ \text{iPhone}, 0.49 \circ \text{nothing})$
- 彩票 $b = (1 \circ \text{茶颜悦色})$

注: 如果你用 LaTeX, 可以用 `\circ` 来输入 (空心圆点) 符号 。

客观概率 v.s. 主观概率

上述模型适用于客观的随机现象

- 例: 投掷公平硬币
  - $1/2$ 概率正面朝上, $1/2$ 概率反面朝上
  - 绝大多数人都会认同这个概率分布
- 这种概率一般称为客观概率

客观概率 v.s. 主观概率

上述模型适用于客观的随机现象

- 例: 投掷公平硬币
  - $1/2$ 概率正面朝上, $1/2$ 概率反面朝上
  - 绝大多数人都会认同这个概率分布
- 这种概率一般称为客观概率

但真实市场中的不确定性 (如战争对股市的影响) 往往**不能**用客观概率描述

- 例: 当俄乌战争爆发时, 投资者们会对该冲击的实际影响有一个判断 (or 信念), 并且我们可以用概率分布来描述这个判断
- 但是, 不同的投资者往往持有不同的信念
- 这类概率一般被称为主观概率

主观概率和世界杯赌局

对于存在主观概率的不确定下的决策问题, 我们一般需要引入**状态** (state) 的概念.

- 最终结果由状态决定
- 决策者对状态的分布持有某个判断

例: 考虑如下关于下届世界杯冠军的赌局

1. 若南美球队夺冠, 得 100 元;
2. 若欧洲球队夺冠, 负 100 元;
3. 否则, 得 0 元.

问: 你愿意参与该赌局吗?

状态和主观概率模型

- 状态空间: $\{$阿根廷夺冠, 西班牙夺冠, ..., 喀麦隆夺冠$\}$
- 最终结果由状态决定:
  - 阿根廷夺冠 $\Longrightarrow +100$ 元
  - 西班牙夺冠 $\Longrightarrow -100$ 元
  - 喀麦隆夺冠 $\Longrightarrow 0$ 元
  - ...

决策者的信念:

- 不同决策者对状态持有不同判断 $\Longrightarrow$ 需要**主观概率**

构建主观概率模型

将上述赌局转化为期望效用最大化问题的步骤如下:

1. 确定**状态空间** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$
   - 状态之间彼此互斥, 并且决策者的最终效用由状态决定
   - 比如, 状态 ω_1 表示"阿根廷夺冠", 状态 ω_2 表示"法国夺冠", 等等...
2. 确定**效用函数**: 状态空间到决策者最终效用的映射
   - 如: 若状态为 "阿根廷夺冠", 决策者的效用为 $u(\$100)$

   请注意, $u(\$100)$ 不一定等于 100.

   - 例如, 效用函数可以是 $u(x) = \sqrt{x}$ 的形式, 其中 x 表示钱数
   - 我们会在之后介绍风险偏好时进一步介绍效用函数 u 的形式对决策的影响
3. 确定**信念**: 对每个状态赋予主观概率 (即信念).

构建主观概率模型

- 例如, 张三对 “参与赌局” 导致的后果的概率分布可能是
  $(0.5 \circ -\$100, \quad 0.45 \circ \$100, \quad 0.05 \circ \$0)$

4. 计算每个选择 (参与赌局和不参与赌局) 下, 决策者的期望效用, 并依此做出决策.

   - 若决策者对是否参与赌局是无差异的, 决策者的最优选择还可以在两个行动之间随机

信念不可观测

- 主观概率即为决策者的**信念**, 不同决策者可能持有不同的信念
- 决策者脑海中的信念是无法直接观测的, 但决策者的行动是可观测的, 我们可以从决策者的行动来推断其信念
  - 例如, 如果张三参与上例中的世界杯赌局, 我们可以作出如下推断: 张三认为南美球队世界杯夺冠的概率大于欧洲球队.

期望效用模型

对于较简单的决策问题, 往往可以略过状态空间的描述, 直接将决策者的信念描述为结果集 Z (而非状态集 Ω) 上的概率分布.

此时, 期望效用模型对应如下决策过程:

1. 对每个可能结果 $z \in Z$ 赋予一个效用值 $u(z)$
   - $u(z)$ 表示决策者眼中结果 z 的 (主观) 价值
2. 对每个结果的可能性进行概率评估, 进而确定概率分布 $p(z)$
3. 计算每个彩票的期望效用, 并选择期望效用最高的彩票
   - 若出现平局, 可在多个期望效用最高的彩票之间随机选择

期望效用示例

假设决策者效用函数为:
$u(\text{茶颜悦色}) = 10, u(\text{iPhone}) = 100, u(\text{nothing}) = 0$

计算:

- 彩票 a 期望效用: $0.5 \times 10 + 0.01 \times 100 + 0.49 \times 0 = 5 + 1 = 6$
- 彩票 b 期望效用: $1 \times 10 = 10 > 6$
- 张三将选择彩票 b

小结: 决策流程

1. 确定确定性结果的效用函数 u
2. 若涉及主观概率, 还需确定状态空间和信念 p
3. 计算每个彩票的期望效用, 选最高者

期望效用模型评价

期望效用模型是经济学最核心的模型之一:

- 我们这门课之后介绍的所有模型, 都假设参与人的行为符合期望效用模型.

期望效用模型本身是否“合理”?

- 公理化基础:
  - 客观概率下: 有 vNM 公理化模型为其合理性提供依据, 我们之后会详细介绍 vNM 公理
  - 主观概率下: Savage 公理化模型 (一般属于研究生阶段内容)

“理性人”和期望效用

如果参与人的行为偏离了期望效用模型, 人们常会简单地说他是“不理性的”.

- 这个说法虽不严谨, 但因其方便, 教师在口头表达中也经常使用.

不过, 严谨的分析不应止步于此.

- 正确做法是, 严谨地描述决策者的决策规则 (如期望效用模型), 并将其最终选择与现实观察 (或实验结果) 对照.
- 如果模型预测与实际结果不符, 不应懒惰地得出“张三不理性”的结论. 相反, 研究者应反思模型中可能的漏洞, 探讨如何修正或推广模型，使其更好地解释真实世界中的决策行为.

绝大多数情形下, 研究者使用期望效用模型时, 是将它作为“实证” (positive) 模型使用, 即用它描述或预测人们的真实选择.

Ellsberg 悖论

为了检验我们对模型的理解, 让我们来看一个著名的经济学实验: Ellsberg 悖论 (Ellsberg, 1961).

Ellsberg 悖论可能是最重要的经济学实验.

- 它的实验设定很简单: 我们不需要使用任何专门的实验软件, 同学们只需要从描述的彩票中, 选择你更偏好的一个即可.

Ellsberg 悖论 —— 实验设计 (1/2)

两个密封的盒子, 分别记作 A 和 B:

- **盒子 A**: 100 个红球 + 100 个黄球
  - 盒子 A 中, 红球和黄球的比例已知
- **盒子 B**: 200 个球, 红球与黄球比例未知

两个密封的盒子, 分别记作 A 和 B:

- **盒子 A**: 100 个红球 + 100 个黄球
  - 盒子 A 中, 红球和黄球的比例已知
- **盒子 B**: 200 个球, 红球与黄球比例未知

第一组选择 (请思考作答):

- 彩票 1: 从盒 A 随机抽一球, 抽到红球奖 100, 否则无奖励
- 彩票 2: 从盒 B 随机抽一球, 抽到红球奖 100, 否则无奖励

第一问: 你更愿意选择彩票 1 还是彩票 2, 或者觉得无差异?

第二组选择(请继续思考):

- 彩票 3: 从盒子 A 随机抽一球, 抽到黄球奖 100, 否则无奖励.
- 彩票 4: 从盒子 B 随机抽一球, 抽到黄球奖 100, 否则无奖励.

第二问: 你更愿意选择彩票 3 还是彩票 4, 或者无差异?

绝大多数被试者会同时认为:

- 彩票 1 严格优于彩票 2.
- 彩票 3 严格优于彩票 4.

问: 请代入没有学过决策理论的 "普通人" 视角, 并分析其决策心理: 为什么大多数人会做出上述选择?

问: Ellsberg 实验结果可以由期望效用模型解释吗?

问: Ellsberg 实验结果可以由期望效用模型解释吗?

不能.

- 记决策者眼中, 红球和黄球的占比分别为 p 和 $1-p$
- 无论 $p \in [0,1]$ 取任何值, 都无法生成和实验结果一致的预测

Ellsberg 悖论 —— 期望效用能解释吗?

问: Ellsberg 实验结果可以由期望效用模型解释吗?

不能.

- 记决策者眼中, 红球和黄球的占比分别为 p 和 $1-p$
- 无论 $p \in [0,1]$ 取任何值, 都无法生成和实验结果一致的预测

需要更一般的模型 (如模糊厌恶模型) 来解释 Ellsberg 悖论.