期望效用：vNM 公理化模型

信息经济学
湖南大学课程

vNM 期望效用模型

本讲介绍冯 · 诺依曼–摩根斯坦 (von Neumann-Morgenstern) 期望效用模型.

- 一般简称为 vNM 期望效用模型

vNM 模型是一个公理化模型, 它的主要内容如下:

- 如果定义在彩票上的偏好关系满足一些**合理的要求** (即**公理**), 那么这个偏好关系一定是期望效用型偏好.

上述 “合理的要求” 可以概括为两个公理: 独立性公理和连续性公理

二元关系 $\succcurlyeq$

令 X 表示决策者张三的选择集. 二元关系 $\succcurlyeq$ 概括了张三对如下问题的回答:

- 给定两个选项 $x, y \in X$, 你更愿意选择谁?
- 若张三觉得 x **弱优于** y, 记作 $x \succeq y$
- 若张三觉得 x **严格优于** y, 记作 $x \succ y$
- 若张三对 x 和 y **无差异**, 记作 $x \sim y$

注: 在上面的描述中, 我们没有对二元关系 $\succeq$ 给出任何限制: $x \succeq y$ 不过是用来描述张三对选项 x 和 y 偏好的记号.

完备性和传递性

定义. 若 X 上的二元关系 $\succeq$ 满足完备性和传递性, 则称 $\succeq$ 为 X 上的**偏好关系**.

- 完备性: 对任意选项 $x, y \in X$, 一定有

$$x \succeq y \ \text{或} \ y \succeq x$$

- 传递性: 对任意选项 $x, y, z \in X$,

$$\text{若} \ x \succeq y \ \text{且} \ y \succeq z, \ \text{则} \ x \succeq z.$$

完备性和传递性

定义. 若 X 上的二元关系 $\succeq$ 满足完备性和传递性, 则称 $\succeq$ 为 X 上的**偏好关系**.

- 完备性: 对任意选项 $x, y \in X$, 一定有
$$x \succeq y \text{ 或 } y \succeq x$$
- 传递性: 对任意选项 $x, y, z \in X$,
$$\text{若 } x \succeq y \text{ 且 } y \succeq z, \text{ 则 } x \succeq z.$$

关于 "偏好关系" 的补充说明:

- 部分文献将同时满足完备性和传递性的二元关系 $\succcurlyeq$ 定义为 "理性的" 偏好关系, 否则视为 "非理性的" 偏好关系.
- 本讲中所有涉及的偏好关系均满足完备性与传递性. 因此, 我们不采用 "理性偏好关系" 这样的叫法, 直接称它为偏好关系即可.

$L(Z)$: 彩票集 (或彩票空间)

大写字母 Z 表示结果集, 小写字母 $z \in Z$ 表示某个可能的结果

- 为简化分析, 总假设结果集 Z 是有限的

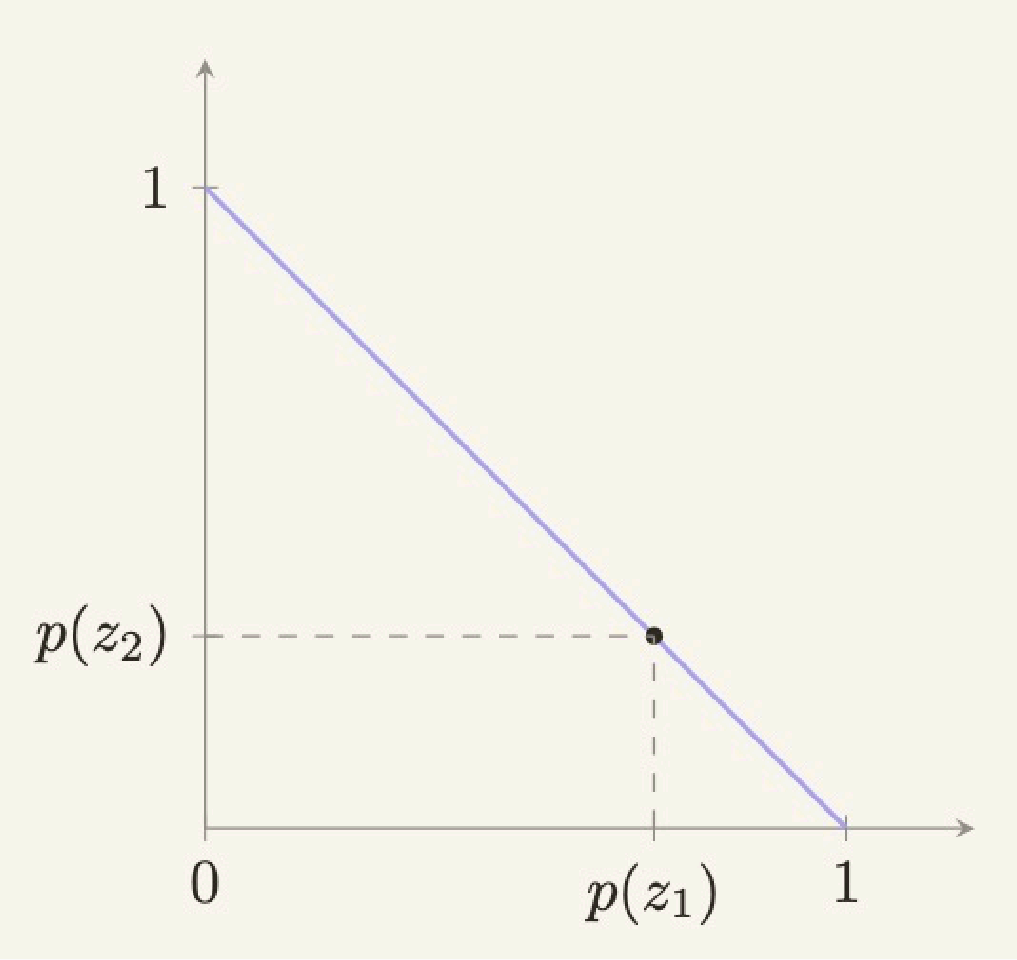
彩票 $p(z)$ 为集合 Z 上的概率分布

- 具体而言, $p(\cdot)$ 是一个函数, 它为每个可能结果 z 赋予一个概率 $p(z) \in [0,1]$, 并且满足 $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$
- 由于 Z 是有限的, 该概率分布可以理解为一个高维向量: $p \in \mathbb{R}^{|Z|}$.

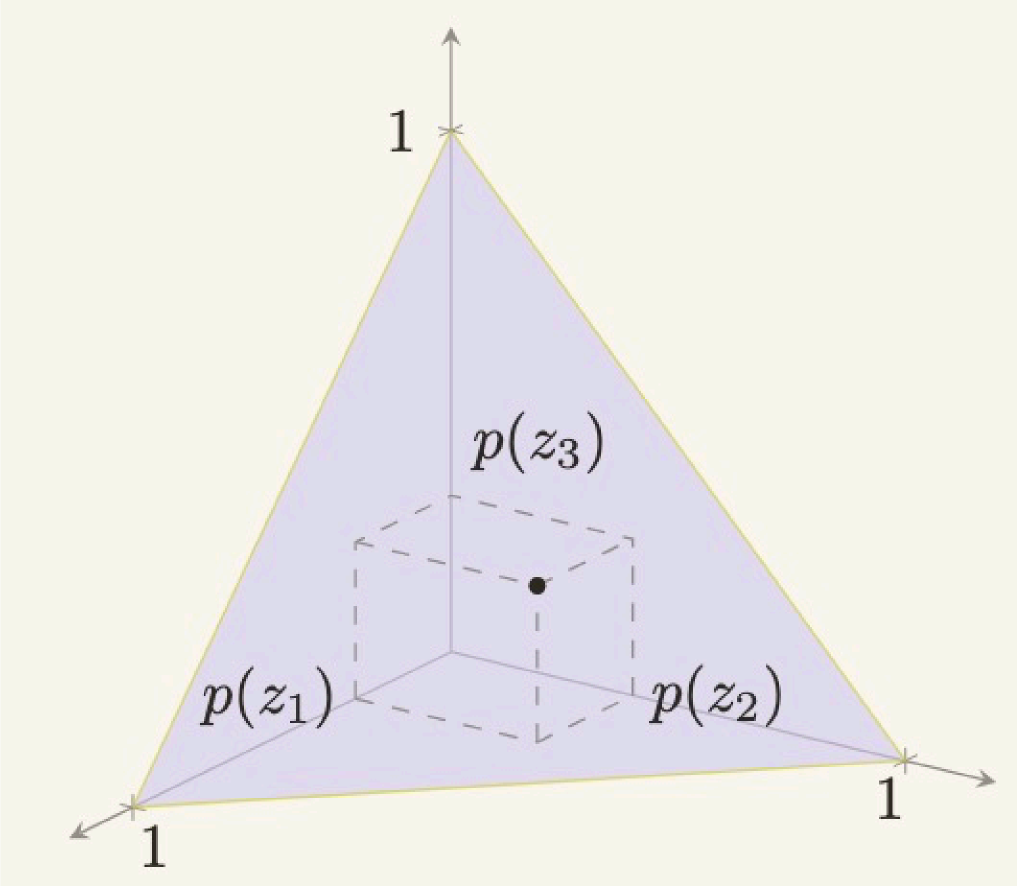
$L(Z) \subseteq \mathbb{R}^{|Z|}$: 集合 Z 上所有彩票构成的集合.

- 不确定性下的偏好考虑的是集合 $X := L(Z)$ 上的偏好关系.

例: 结果集为 $Z = \{z_1, z_2\}$ 时的彩票空间



例: 结果集为 $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ 时的彩票空间



退化彩票

如果某个彩票 p 下, 获得特定结果 $z \in Z$ 的概率为 1 (即 $p(z) = 1$), 则称该彩票是**退化的**.

- $(1 \circ z)$ 即表示某个退化彩票;

一般用符号 δ_z 表示退化彩票的概率分布函数 (Dirac's delta), 它满足

$$\delta_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = z \\ 0 & \text{if} \quad x \neq z \end{cases}$$

练习 (非常容易). 符号 $(\alpha \circ x, (1 - \alpha) \circ y)$ 表示的彩票对应的概率分布是? 什么时候该彩票是退化的?

如果某个彩票 p 下, 获得特定结果 $z \in Z$ 的概率为 1 (即 $p(z) = 1$), 则称该彩票是**退化的**.

- $(1 \circ z)$ 即表示某个退化彩票;

一般用符号 δ_z 表示退化彩票的概率分布函数 (Dirac's delta), 它满足

$$\delta_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = z \\ 0 & \text{if} \quad x \neq z \end{cases}$$

练习 (非常容易). 符号 $(\alpha \circ x, (1-\alpha) \circ y)$ 表示的彩票对应的概率分布是? 什么时候该彩票是退化的?

- 结果 x 发生的概率为 α, 结果 y 的发生概率为 $1 - \alpha$
- 若 $\alpha = 1$ 或 0, 该彩票是退化的, 对应的概率分布函数分别为 δ_x 和 δ_y.

关于彩票的偏好

本讲讨论的是包含不确定性的决策问题, 即彩票集 $L(Z)$ 上的偏好关系.

- $L(Z)$ 上满足完备性和传递性的二元关系 $\succcurlyeq$ 有很多, 但并非所有这些关系都能用期望效用来表示.

下面我们给出几类定义在 $L(Z)$ 上, 且满足完备性和传递性的二元关系 $\succcurlyeq$.

例 (追求平等型偏好). 对任意两个彩票, 决策者总偏好其中**分散程度较低**的彩票.

- 彩票 p 的分散程度可以用其方差 (即系数 $\sum_{k=1}^{|Z|}(p_k - \frac{1}{|Z|})^2$) 来衡量.

例 (追求平等型偏好). 对任意两个彩票, 决策者总偏好其中**分散程度较低**的彩票.

- 彩票 p 的分散程度可以用其方差 (即系数 $\sum_{k=1}^{|Z|}(p_k - \frac{1}{|Z|})^2$) 来衡量.

请验证, 上例中的 $\succcurlyeq$ 确实是一个偏好关系, 即它满足完备性和传递性.

例 (追求极端型偏好). 对任意两个彩票 p 和 q, 若 $\max_{z\in Z} p(z)$ 大于 $\max_{z\in Z} q(z)$, 则决策者认为彩票 p 严格优于彩票 q.

问: 你觉得上述两个偏好关系 (追求极端型和追求平等型) “合理” 吗?

$L(Z)$ 上的偏好: 追求极端型偏好

上面这两个例子中, 偏好关系忽略了结果本身的好坏, 仅依赖于概率向量.

真实的决策过程中, 偏好会包含对每个具体结果的评估.

- 决策者往往对每个具体结果 $z \in Z$ 存在 "天然的" 偏好关系

当结果集为 $Z = \{\text{iPhone, 茶颜悦色, nothing}\}$ 时:

- 决策者一般会最喜欢退化彩票 $(1 \circ \text{iPhone})$, 最不喜欢退化彩票 $(1 \circ \text{nothing})$.
- 但在 "追求平等型偏好" 和 "追求极端型偏好" 下, 决策者对这两个退化彩票无差异.

接下来的偏好例子包含了决策者对每个具体结果 z 好坏的评估, 这个评估可以表示为某个效用函数 $u : Z \to \mathbb{R}$.

例 (最坏可能结果偏好). 考虑如下决策流程:

1. 为每个结果 $z \in Z$ 赋予一个效用值 $u(z)$
2. 对任意彩票 p, q, 若决策者认为彩票 p 下的**最坏可能**结果弱优于彩票 q 下的**最坏可能**结果, 即

$$\min\{u(z) \mid p(z) > 0\} \geq \min\{u(z) \mid q(z) > 0\}$$

则决策者认为彩票 p 弱优于彩票 q $(p \succeq q)$.

上述决策过程对应的偏好为最坏可能结果偏好 (也叫 “悲观偏好”)

最坏可能结果偏好

悲观偏好在计算机科学领域中很常用:

- 若算法 A 在最坏情况下的表现 (如计算复杂度) 优于算法 B, 则称算法 A 优于算法 B.
- 悲观偏好在计算机科学领域的广泛使用, 说明其具有一定的合理性与实用性.

最坏可能结果偏好

悲观偏好在计算机科学领域中很常用:

- 若算法 A 在最坏情况下的表现 (如计算复杂度) 优于算法 B, 则称算法 A 优于算法 B.
- 悲观偏好在计算机科学领域的广泛使用, 说明其具有一定的合理性与实用性.

悲观偏好只关注最坏的可能情形, 你可以仿照这种方式构造其它的偏好例子:

- **乐观偏好**: 决策者只关注彩票 p 下**最好的结果**, 并依此评估彩票的好坏.
- **最可能结果偏好**: 决策者只关注彩票 p 下**最可能的结果**, 并依此评估彩票的好坏.
- 但据我所知, 没有哪个领域的研究者会使用乐观偏好或最可能结果偏好.

期望效用偏好

定义 (期望效用偏好). 期望效用偏好对应如下决策流程: 为每个结果 $z \in Z$ 赋予一个效用值 $u(z)$, 并基于彩票下**效用的期望值**来评估彩票:

$$p \succeq q \quad \text{若且唯若} \quad \sum_{z \in Z} p(z)u(z) \geq \sum_{z \in Z} q(z)u(z).$$

说明:

- 期望效用偏好是经济学领域中最常使用的偏好类型, 此时的效用函数 $u : Z \to \mathbb{R}$ 被称为 vNM 效用函数.
- 一般用 $U(p) := \sum_{z \in Z} p(z)u(z)$ 表示彩票 p 的期望效用; 期望效用偏好下, 当且仅当 $U(p) \geq U(q)$ 时, 决策者认为彩票 p 弱优于彩票 q.

期望效用偏好

期望效用偏好和悲观偏好都不是唯一的, 而是**一类偏好**:

- 决策者对彩票的偏好取决于其结果集上的效用函数 $u : Z \to \mathbb{R}$, 不同的效用函数对应不同的期望效用偏好和悲观偏好.

公理化方法

对于彩票的 "合理" 偏好不存在唯一的标准:

- 经济学领域常用**期望效用偏好**, 而计算机科学领域常用**最坏可能结果偏好**

要评判哪一种偏好关系更适用于经济决策, 首先需要明确什么是 "合理", 即我们希望偏好关系满足哪些基本要求.

公理化方法: 抽象地陈述适用于彩票空间 $L(Z)$ 上偏好的**一般性要求**, 并在此基础上推导出满足这些要求的偏好关系

- "一般性要求"的意思是, 它必须对 $L(Z)$ 中所有彩票都成立.
- 这些 "一般性要求" 通常被称为**公理**.

vNM 模型是对期望效用偏好的公理化: 除了偏好关系本身必须满足的完备性和传递性公理外, vNM 模型还用到了独立性公理和连续性公理.

连续性公理的引入动机

考虑如下两个彩票:

- 彩票 1: 依概率 α 获得 100 元, 依概率 $1-\alpha$ 获得 0 元
- 彩票 2: 一定获得 10 元

若 $\alpha = 1$, 决策者认为彩票 1 严格优于彩票 2;
若 $\alpha = 0.99$, 决策者认为彩票 1 严格优于彩票 2;
$\vdots$
若 $\alpha = 0.01$, 决策者认为彩票 2 严格优于彩票 1;
若 $\alpha = 0$, 决策者认为彩票 2 严格优于彩票 1.

直觉上, 应该存在某个 $\alpha \in (0,1)$, 使得决策者对彩票 1 和彩票 2 无差异.

定义 (连续性). 令 $\succeq$ 为彩票集 $L(Z)$ 上的偏好关系. 若对于 Z 中任意三个满足 $\delta_a \succ \delta_b \succ \delta_c$ 的结果 a、b 和 c, 总存在实数 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$(1 \circ b) \sim (\alpha \circ a, (1-\alpha) \circ c)$$

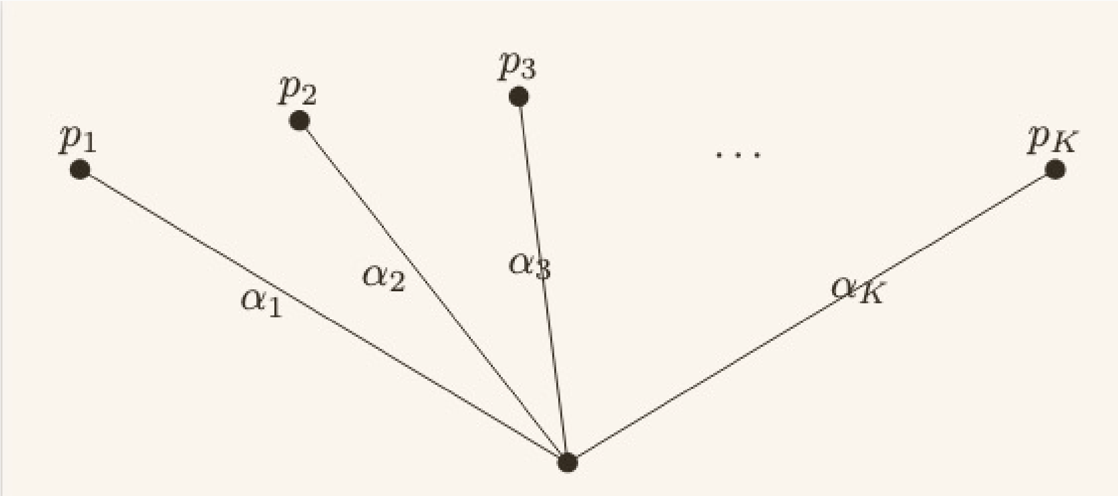
则称 $\succeq$ 是**连续的**.

练习 (中等难度).

1. 请说明, 当集合 Z 至少包含三个元素时, 悲观偏好不是连续的.
2. 请说明, 期望效用偏好是连续的.

复合彩票

在正式陈述独立性公理之前, 我们先定义复合彩票.



复合彩票对应如下包含两个阶段的不确定性消解过程:

- 阶段 1: 根据概率分布 $(\alpha_1, ..., \alpha_K)$, 从彩票集合 $\{p_1, ..., p_K\}$ 中抽取一个彩票;
- 阶段 2: 给定上一阶段抽取的彩票 $p \in \{p_1, ..., p_K\}$, 再按概率分布 p 从集合 Z 中抽取最终结果 $z \in Z$.

复合彩票: 定义

定义 (复合彩票). 给定 K 个彩票 $p_1, p_2, ..., p_K$ 和 K 个和为 1 的非负实数 $(\alpha_1, ..., \alpha_K)$, 若存在彩票 $\hat{p} \in L(Z)$ 使得

$$\hat{p}(z) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_k(z),$$

则称 $\hat{p}$ 为**复合彩票**.

定义 (复合彩票). 给定 K 个彩票 $p_1, p_2, ..., p_K$ 和 K 个和为 1 的非负实数 $(\alpha_1, ..., \alpha_K)$, 若存在彩票 $\hat{p} \in L(Z)$ 使得

$$\hat{p}(z) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_k(z),$$

则称 $\hat{p}$ 为**复合彩票**.

练习: 验证上述定义中的 $\hat{p}$ 确实是彩票, 即 $\hat{p}$ 为 Z 上的概率分布.

复合彩票: 定义

定义 (复合彩票). 给定 K 个彩票 $p_1, p_2, ..., p_K$ 和 K 个和为 1 的非负实数 $(\alpha_1, ..., \alpha_K)$, 若存在彩票 $\hat{p} \in L(Z)$ 使得

$$\hat{p}(z) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_k(z),$$

则称 $\hat{p}$ 为**复合彩票**.

练习: 验证上述定义中的 $\hat{p}$ 确实是彩票, 即 $\hat{p}$ 为 Z 上的概率分布.

复合彩票的记号: $\bigoplus_{k=1}^{K} \alpha_k p_k := \hat{p}$.

复合彩票: 记号说明

- 一般形式: 用 $\oplus_{k=1}^{K} \alpha_k p_k$ 表示K 个彩票的复合
- 当只涉及两个彩票 p_1 和 p_2时, 使用符号 $\alpha_1 p_1 \oplus (1-\alpha_1)p_2$ 表示其对应的复合彩票.

注:

- 如果你用 LaTeX, 可在数学模式中用 `\oplus` 输入符号 $\oplus$
- 如果你不喜欢引入新的符号, 请自行在脑海中将所有 $\oplus$ 替换为加号 $+$.
- 确实也有部分文献使用加号来表示复合彩票, 如 $\alpha_1 p_1 + (1-\alpha_1)p_2$. 大部分情况下, 读者可以看出这里的 $+$ 表示的不是加法, 而是彩票的复合.

独立性公理的引入动机

考虑如下两个复合彩票: $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ 和 $\alpha p' \oplus (1-\alpha)q$

- 它们用于复合的概率权重相同: α 和 $1-\alpha$
- 唯一的不同在于, 后一个复合彩票中用彩票 p' 替代了前一个复合彩票中的 p

独立性公理的引入动机

考虑如下两个复合彩票: $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ 和 $\alpha p' \oplus (1-\alpha)q$

- 它们用于复合的概率权重相同: α 和 $1-\alpha$
- 唯一的不同在于, 后一个复合彩票中用彩票 p' 替代了前一个复合彩票中的 p

直觉上, 若决策者觉得彩票 p 优于 p', 应该也会认为复合彩票 $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ 优于 $\alpha p' \oplus (1-\alpha)q$; 反之亦然.

独立性

定义 (独立性). 对任意彩票 $p, p', q \in L(Z)$ 和任意概率权重 $\alpha \in (0,1)$,

$$p \succeq p' \quad \text{若且唯若} \quad \alpha p \oplus (1-\alpha)q \succeq \alpha p' \oplus (1-\alpha)q.$$

独立性

定义 (独立性). 对任意彩票 $p, p', q \in L(Z)$ 和任意概率权重 $\alpha \in (0,1)$,

$$p \succeq p' \quad \text{若且唯若} \quad \alpha p \oplus (1-\alpha) q \succeq \alpha p' \oplus (1-\alpha) q.$$

独立性的推论:

$$p \sim p' \quad \text{若且唯若} \quad \alpha p \oplus (1-\alpha) q \sim \alpha p' \oplus (1-\alpha) q.$$

定理 (冯·诺依曼–摩根斯坦定理). 彩票集 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succcurlyeq$ 为期望效用偏好, 当且仅当偏好关系 $\succcurlyeq$ 满足独立性和连续性.

说明:

- 上述定理一般被称为 vNM 定理. 我们不要求会证, 但要求理解这个定理的含义: 对于期望效用偏好而言, 独立性和连续性既是充分的、也是必要的.

vNM 定理证明思路

- 必要性部分较为直接: 直接通过偏好的期望效用表示就可以证明其满足独立性和连续性
- 充分性部分则相对复杂, 有兴趣的同学可参考课程网站上发布的补充材料, 其中给出了详细的推导步骤:
  - 首先, 证明独立性公理蕴涵单调性（引理 3.1）
  - 然后, 利用连续性公理，将每一个彩票对应到某个位于对角线上的等效用彩票
  - 最后, 通过这一对应关系构造出所需的 vNM 效用函数

vNM 效用的唯一性

定义 (正仿射变换). 称函数 $v(z)$ 是函数 $u(z)$ 的**正仿射变换**, 若存在正数 $\alpha > 0$ 和常数 β 使得 $v(z) = \alpha u(z) + \beta$ (即乘以一个正数并加上任意常数).

定义 (正仿射变换). 称函数 $v(z)$ 是函数 $u(z)$ 的**正仿射变换**, 若存在正数 $\alpha > 0$ 和常数 β 使得 $v(z) = \alpha u(z) + \beta$ (即乘以一个正数并加上任意常数).

命题. vNM 效用函数 $u : Z \to \mathbb{R}$ 在**正仿射变换**的意义上是唯一的:

- 考虑 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succeq$, 令 $u(z)$ 为其 vNM 效用函数. 若 $v(z)$ 也为其 vNM 效用函数, 则 $v(z)$ 一定是 $u(z)$ 的正仿射变换.

vNM 效用的唯一性

注: 期望效用偏好仅对于效用函数的正仿射变换具有不变性, 对于一般的正单调变换不具有不变性.

- $f(x) = \sqrt{x}$ 是一个正单调变换, 也是一个严格凹变换. 对决策者的效用函数施加凹变换 f, 会改变决策者的风险态度.

阿莱悖论

如下两个彩票, 你更愿意选谁?

- L_1: 25% 概率得 3000 元, 75% 概率得 0 元
- L_2: 20% 概率得 4000 元, 80% 概率得 0 元

阿莱悖论

如下两个彩票, 你更愿意选谁?

- L_1: 25% 概率得 3000 元, 75% 概率得 0 元
- L_2: 20% 概率得 4000 元, 80% 概率得 0 元

如下两个彩票, 你更愿意选谁?

- L_3: 一定获得 3000 元
- L_4: 80% 概率获得 4000 元, 20% 概率获得 0 元

阿莱悖论与独立性公理

实验中, 大多数人同时选择了彩票 2 以及彩票 3, 即:

$$L_1 \prec L_2, \quad L_3 \succ L_4$$

这种偏好关系违反了独立性公理:

- $L_1 = 0.25L_3 \oplus 0.75\delta_0$, $L_2 = 0.25L_4 \oplus 0.75\delta_0$.
- 独立性公理要求: $L_1 \prec L_2 \Leftrightarrow L_3 \prec L_4$.

框架效应

- 决策行为有时会取决于备选项的呈现方式 (即 “框架”, frame)
- 当彩票 L_1 和 L_2 按上述方式呈现时, 大多数人偏好L_2.
- 但是, 如果将 L_1 和 L_2 呈现为上述复合彩票的形式时, 大多数受试者会偏好 L_1 而不是 L_2.